ARCHÉOLOGIE DU CAPES MATHS

Leçons d’oral 1 du CAPES externe de mathématiques
session 1993

Préparation du CNED

Anne Levy-Brulh

1 septembre 1992

Centre de VANVES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

CENTRE NATIONAL D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE

C'est la leçon n° 58

MATHEMATIQUES

Leçons d'Oral

Conseils pour l'Oral

(première épreuve)

La table des matières et la liste des leçons du CAPES externe 1993 sont en fin de document.

Rédacteur : Mme LEVY - BRULH

Référence : E 2288 T
424

Quelques conseils pour préparer l'oral - 1re épreuve -
du CAPES de Mathématiques - Session 1994.

L'oral du CAPES de Mathématiques comporte deux épreuves et dans ces pages, il ne sera question que de la première épreuve.

Cette épreuve se déroule en général l'après-midi, après une préparation de deux heures sans aucun document : seuls les programmes du secondaire avec leurs commentaires sont autorisés ; si la leçon que vous devez traiter est une leçon demandant des exemples numériques (par exemple statistiques, probabilités ...) vous trouverez sur place des calculettes ordinaires de toutes marques (vos calculettes personnelles sont interdites). Les titres des leçons sont choisis par le jury du concours de l'année, la liste qui vous est proposée est celle du concours 1993 ; cette liste évolue en fonction des programmes (notez en 1993 la suppression de tout ce qui concerne fonction réciproque, en conformité avec les programmes de Terminale) et du programme complémentaire que vous devez avoir reçu, et avoir lu attentivement.

Les meilleurs renseignements concernant cette épreuve sont donnés dans le rapport, dont suit un extrait :

Extrait du rapport du CAPES 1993.

Première épreuve

"Exposé sur un thème donné", suivi d'un entretien avec le jury sur les questions soulevées par l'exposé du candidat (durée de la préparation:deux heures; durée de l'exposé:vingt-cinq minutes; durée de l'entretien:vingt minutes; coefficient 1).

Remarques générales

Il convient de bien gérer les vingt-cinq minutes de l'exposé.En particulier, la présentation éventuelle de rappels ou de prérequis doit être succincte.

La cohérence de l'exposé et la mise en valeur de l'enchaînement des idées sont des objectifs majeurs.Le jury invite les candidats à:
.construire un plan rigoureux (éviter, par exemple, d'utiliser une propriété énoncée ultérieurement);ce plan peut parfois demeurer sur le tableau;
.souligner les idées directrices;
.écrire avec précision les définitions et les propriétés principales, correctement quantifiées, s'il y a lieu;
.donner au moins les grandes lignes des démonstrations significatives ou importantes;
.illustrer l'exposé de schémas, figures et exemples pertinents.

Un simple catalogue de définitions, de théorèmes et/ou d'exemples ne suffit pas.Il est indispensable d'analyser l'articulation des divers éléments et d'esquisser les contextes dans lesquels ils se situent.Il est donc fort utile de bien connaître les programmes officiels des classes du secondaire.S'il n'est pas interdit de sortir de ce cadre strict afin de donner plus de cohérence à certains sujets, il est nécessaire, pour cela, de maîtriser les notions correspondantes.

Une bonne présentation doit distinguer clairement hypothèses et conclusions.Les confusions entre analyse et synthèse, propriété directe et réciproque, existence et unicité sont à éviter.

Par ailleurs, il faut rappeler que "les qualités personnelles et relationnelles jouent un rôle de premier plan".Le jury a pu apprécier la qualité de nombreux exposés développés avec conviction et dynamisme; en particulier, sont remarqués ceux qui ont été soigneusement étudiés au cours d'une préparation spécifique, dont l'importance est ainsi confirmée.

Quant à l'entretien, son but n'est pas de déprécier le candidat mais, à partir des questions soulevées par l'exposé, de s'assurer de ses capacités à réagir et de son degré de maîtrise des notions mises en œuvre.Il doit donc s'attendre à ce que le jury lui demande de faire une démonstration, de donner des contre-exemples,...Ainsi, l'entretien a souvent permis à des candidats, dont l'exposé avait été très moyen, de manifester leurs qualités.

Remarques particulières

L'utilisation d'un langage formalisé et, notamment, de symboles logiques n'est pas indispensable; elle est soumise à des règles de syntaxe strictes.

Les caractérisations de fonctions, les propriétés caractéristiques de configurations géométriques doivent être comprises dans leur sens mathématique.

L'importance de la notion d'intervalles dans les hypothèses de certains théorèmes est à mettre en évidence.

Pour les suites, la comparaison à une suite de référence ne fournit qu'une condition suffisante.

La dérivabilité de $f \circ g$, sous des hypothèses convenables, doit être soigneusement établie.

La caractérisation d'une solution d'une équation différentielle du second ordre par des conditions initiales est à connaître et à utiliser.

L'identification des nombres réels avec les nombres complexes de partie imaginaire nulle est à souligner.

Il est indispensable de maîtriser les angles orientés et leurs mesures.

La recherche des isométries du plan conservant une configuration ne doit pas se réduire à un catalogue qui ne permet pas de savoir si elles sont toutes obtenues; d'autre part, il faut établir l'équivalence avec la conservation des sommets.

L'identité fait partie des isométries du plan qui ont au moins deux points invariants.

Les homothéties, munies de la loi de composition des applications, ne constituent pas un groupe.

Répartition des notes (sur 20)

Nombre de candidats : 1828
Moyenne : 10,5
Meilleure note : 20 (7 fois)
Quartiles (arrondis) : 14 11 7

Notes ≥ à:	18	16	14	12	10	8	6	4	2
Nombre :	114	273	530	814	1023	1297	1547	1710	1806

Il ressort de ce rapport que vous devez présenter sur le sujet choisi un exposé concis, comportant au moins une

démonstration, et que vous devez faire preuve de dynamisme.

Pour les leçons proposées en 1993, voici quelques conseils concernant certaines leçons et pour d'autres une leçon effectivement préparée (ce n'est en aucun cas un modèle, ceci peut vous servir d'indication).

Les manuels de l'enseignement secondaire vous seront très utiles pour préparer cet oral ; ils vous donneront aussi une bonne idée de la motivation des programmes, de la progression des thèmes abordés.

En dehors de ces ouvrages, vous pouvez consulter

– pour l'arithmétique, l'étude des coniques, des livres de Terminale du programme 1962 par exemple : Cours Maillard - Mathématiques élémentaires, tome 1 - Hachette 1963 - qui doit être disponible dans les IREM ; ou bien Richard, Cerfs Mathématiques, leçons 36-45, Hermann 1981

– deux ouvrages de classes de Terminales C et E parus en 1983 (programme 1984 - périmé -) chez Ellipses de P. Sauser

Travaillez sérieusement, ne négligez pas des points de détail, le jury saura apprécier vos capacités de réflexion.

Vous trouverez la liste des leçons de 93 en fin de fascicule.

Quelques indications pour les leçons :

01 - 02 - 03 - Leçons de dénombrement : le terme de p-liste a remplacé celui d'application de $\{1, .. p\}$ dans un ensemble fini A à n éléments.
Les plans de ces leçons sont donnés par les énoncés. N'oubliez pas de donner des exemples.

04 - 05 - 06 - 07 - Voir exemples de leçons de probabilités, et manuels 1e et T.

08 - 09 - 10 . arithmétique 08 Attention à la définition du reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (il est positif ou nul) ; penser à l'algorithme d'Euclide dans la leçon 08 (et à l'étude des idéaux de $\mathbb{Z}$)
09 identité de Bezout à donner : a et b premiers entre eux si et seulement si il existe u et v entiers tels que $au + bv = 1$. Penser à la détermination de u et v en "remontant l'algorithme d'Euclide. Donner le théorème de Gauss ; le produit du pgcd et du ppcm de a et b est égal à ab.
10. Attention à la difficulté de présentation pour obtenir effectivement l'unicité de la décomposition (penser à l'ordre, aux puissances nulles, ...)
Penser au crible d'Erathostène pour rechercher les nombres premiers.

11 . 12 . 13. Attention les programmes du secondaire n'introduisent pas les polynômes mais seulement les fonctions polynômes à coefficients réels
Le 1er résultat important est : une fonction polynôme à coefficients réels est nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous les coef sont nuls (on le démontre en dérivant $f(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_p x^p$ $f(0) = 0$ puis $f'(0) = 0$ ...)
→ Puis seulement après définir le degré."
Penser à la méthode de Hörner (Terracher 1e S Hachette, ancienne édition) pour donner un algorithme permettant de voir si on peut factoriser par $x - a$.

12. L'étude du sens de variation doit se faire grâce à la forme canonique et à la connaissance des variations de $x \to ax^2$.

14 Voir rappels de cours pour l'écrit.

15. 16. 17. 18. 19. 20 - 21 Outre les modèles fournis.
21 : voir similitudes en annexe.

[15] Il est important dans cette leçon de montrer qu'il existe un homomorphisme de corps injectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et d'expliquer que $\mathbb{C}$ a été construit comme sur-corps de $\mathbb{R}$. De plus, montrez que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont on prend pour base $(1,0)$ et $(0,1) = i$.

[17] Les fonctions cosinus et sinus sont supposées connues avec leurs propriétés élémentaires ($\cos(a+b)$, $(\cos x)'$ ..) On étudie la fonction $t \to e^{it}$ en montrant qu'elle est continue, dérivable, périodique de période 2π et à valeurs dans le cercle unité. On vérifie à l'aide des formules de trigonométrie que. $e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$
et on en déduit la formule de Moivre et les applications en analyse. calcul d'intégrales, résolution des équations différentielles du second ordre,

23 donné.

24 - 25 - 26 24 Théorème de Thalès : en seconde actuellement -
Il s'agit de définir une projection affine p, de montrer que l'application linéaire associée vérifie $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ et de montrer que tte application affine ayant au moins un point fixe et dont l'application linéaire associée vérifie $\vec{p} \cdot \vec{p} = \vec{p}$ est une projection.

27 donné

28 - 29 - 31 - Homothéties - translations - voir annexe

[28] Une homothétie ou une translation est une application affine f du plan telle que : $\exists k \in \mathbb{R}$ $\forall M$ $\forall N$ $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$. Montrer la réciproque En déduire que les homothéties translations forment un groupe Montrer aussi que les seules applications du plan qui transforment toute droite en une droite qui lui est parallèle ~~sont~~ les homothéties et les translations

29. Pensez aux segments (Tomacher 1'S géométrie page 75), si A, B, C, D sont alignés voyez l'exercice 52 page 93 du même ouvrage.
Pensez aux cercles ; comme applications donnez la construction à la règle seule de la parallèle à un segment donné passant par un point donné, le milieu I du segment donné étant connu ; le tracé de la droite joignant M_0 donné à O point de concours (non sur la feuille) de deux droites d et d' données ; le tracé des tangentes communes à deux cercles ; les propriétés du cercle d'Euler
Voir aussi "Ex 2 p 189 du Transmath TC87, t2"
"Pb des médianes, ex 16 p 198, Transmath TC87, t2"

AR

30. Lien avec les similitudes : composer une telle transformation par une homothétie de rapport k si : $\exists (A, B) \in \mathcal{E}^2 \quad \|\overrightarrow{f(A) f(B)}\| = k \|\overrightarrow{AB}\|$ pour vous ramener à une isométrie et à la leçon 52. Voir annexe sur les similitudes.

32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 donnés

40 prendre un livre de 1'S pour avoir les différentes définitions du produit scalaire

41 prendre un vieux livre de Terminale.

42. donné

43. Un vieux livre du secondaire vous donnera une idée de ce que vous pouvez donner:

$$|BC - CA| < AB < BC + CA$$
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad [2\pi]$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$\sin \hat{B} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ac}} \qquad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$\frac{a}{|\sin \hat{A}|} = \frac{b}{|\sin \hat{B}|} = \frac{c}{|\sin \hat{C}|}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{relation de Héron}$$
$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$
$\left(S \leqslant p^2 \frac{\sqrt{3}}{9} \right.$ inégalité isopérimétrique si vous en avez le courage)

Pensez aussi à la formule de la médiane, à la formule de Stewart (calcul des longueurs des bissectrices intérieures)

?

44 donné

45 : penser à la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite, à la distance de deux droites (perpendiculaire commune).

46 : prendre un livre de Terminale C. Il n'y a pas d'étude de point singulier – Donner une exemple de tangente à une conique obtenue aussi.

47-48. barycentre : livres de Terminale C et Première S
livres de Sauser – (avec belle application du cercle circonscrit au triangle (ABC) comme ligne de niveau d'une fonction scalaire de Leibniz bien choisie)

49. voir annexe sur les homothéties – translations.

50-51 – donnés

52 similitudes directes, voir annexes –

53-54 donnés

55 – voir annexe sur les homothéties

56 faire comme la leçon 32 mais dans l'espace

57 livres de Terminale C

58 voir les livres Transmath TC par exemple + remarques

59-60-61-62-63 voir Sauser

64 donné

65-66-67-68 67 voir leçon (idées).

Vous pouvez donner la définition d'une suite convergente avec "ε". [C'est même ce que le jury souhaite]. Toutefois vous avez le droit de suivre les programmes actuels [comparaison à des suites de références], en comprenant bien que cela vous interdit les démonstrations générales (limite d'une somme, etc)

69-70. Ne pas hésiter à utiliser les définitions avec des ε.

71.

Montrer l'équivalence de l'existence du nombre dérivé en un point et d'un développement limité d'ordre 1. Pour les interprétations, si l'on veut traiter l'interprétation cinématique (vitesse), on doit se placer dans le cadre des mouvements rectilignes (sinon cela relève des fonctions vectorielles).

Mettre en évidence que la dérivabilité en un point entraîne l'existence d'une tangente à la courbe représentative, mais qu'une courbe peut admettre une tangente en un point sans être dérivable (tangente verticale par exemple).

72 classique

73

Ces études locales peuvent se faire par des moyens élémentaires (identités classiques et quantité conjuguée). Si l'on utilise la notion de développement limité, il faut pouvoir en donner une définition précise et retrouver ses principales propriétés (unicité, ...). Les méthodes algébriques donnent ici en plus l'expression explicite du reste, que l'on peut alors encadrer dans un voisinage de 0. Interpréter géométriquement les approximations.

74 analogue à 74.
Voir 69-70
75 Leçon classique. On peut dériver l'inégalité du théorème
76 des accroissements finis, démontré à partir de Rolle supposé connu ; ou bien, comme dans l'enseignement secondaire actuel, la faire dériver de l'application des dérivées au sens de variation (ce qui cache un cercle vicieux admis, puisque le seul moyen de montrer proprement ce résultat sur les dérivées est d'utiliser le théorème des accroissements finis).

TB

Les applications sont classiques (majorations, étude de suites définies par récurrence ...)

77

leçon assez délicate, tant que l'on n'a pas vu que des cas bizarres peuvent se produire : par exemple

$$x \longmapsto x^n \sin \frac{1}{x} \text{ prolongée en 0 par 0,}$$

pour n assez grand peut être de classe C^p (p fois dérivable et de dérivée p-ième continue, avec prolongement par continuité).

Cependant, au voisinage de 0, on ne peut trouver un nombre fini d'intervalles sur chacun desquels elle soit monotone, et de plus elle traverse une infinité de fois sa tangente (horizontale) à l'origine.

D'autre part, une courbe peut admettre une tangente d'inflexion sans être dérivable (tangente verticale!) ou avoir une dérivée seconde nulle sans admettre une tangente d'inflexion ($x \to x^4$ à l'origine).

L'outil efficace pour étudier la courbe au voisinage d'un point où elle est suffisamment dérivable est le développement limité.

78 donné

79 - 80 donnés

81 - 82 idées données

83

Par définition, $a^x = e^{x \ln a}$. Après avoir étudié ces fonctions, il faut prouver que ce sont les seules fonctions dérivables non nulles vérifiant l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$: Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$, alors $f \equiv 0$. Sinon $f(0) = 1$. En dérivant,

$f'(y) = f'(0) f(y)$, d'où $f(y) = \lambda e^{f'(0) y}$ [en dérivant $f(y) e^{-f'(0) y}$] puis $\lambda = 1$ car $f(0) = 1$.

Faire remarquer l'origine de la notation a^x en faisant x entier, rationnel.

83. 84 — 84 donné
83 classique

85 figure dans les livres de Terminale, y compris Saussez (Ellipses)

86 donné

87. 88 — Intervention dans 87 : résolution de $y' = \alpha y$, puis $y' - ay = g(x)$

$y' - \alpha y = 0$

Soit (f, I) une solution quelconque (I étant d'intérieur non vide). On établit aisément que pour tout $x \in I$

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)'(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{e^{\alpha x}} = 0$$

Il s'en suit que $\frac{f}{f_1}$ [qui pouvait être définie puisque $e^{\alpha x} \neq 0$ pour tout x] est une fonction constante ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^{\alpha x}$.
On note que ceci vaut pour $I = \mathbb{R}$. d'où le résultat.

Pour les utilisations on pourra songer aux problèmes suivants :

- détermination de mouvements rectilignes dont la vitesse est proportionnelle à l'abscisse à tout instant $x'(t) = \alpha\, x(t)$;
- résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, à second membre non nul, dont on connait une solution particulière y_0 ;
  de $y' + \alpha y = \beta(x)$ et $y_0' + \alpha y_0 = \beta(x)$
  on tire $(y - y_0)' + \alpha(y - y_0) = 0$ d'où $y(x) - y_0(x) = \lambda e^{\alpha x}$
  et $y(x) = y_0(x) + \lambda e^{\alpha x}$;
  par exemple $y' - 4y = 8$ conduit à $y(x) = -2 + \lambda e^{4x}$.

88 Il faut montrer (cf étude précédente (86)) que les seules solutions de $y'' + a^2 y = 0$ sont de la forme $\lambda \cos ax + \mu \sin ax$. La donnée des conditions initiales détermine λ et μ.

89 donné.

PROBABILITES

Dans toute cette présentation nous ne nous intéresserons qu'aux probabilités finies. Une généralisation au cas dénombrable (probabilités discrètes) est sans problèmes mais plusieurs énoncés seraient faux avec des probabilités continues

1 Expériences aléatoires.

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne connait pas son issue à priori (par exemple tirer une boule dans une urne). Les différents résultats possibles de cette expérience (par exemple tirer une boule noire) s'appellent des *événements (élémentaires)*. Une *épreuve* consiste à réaliser effectivement l'expérience ; on peut alors constater si un événement donné s'est produit ou non. Si on fait plusieurs fois l'expérience, on peut calculer le rapport entre le nombre d'épreuves où cet événement s'est produit et le nombre total d'épreuves. En répétant effectivement l'expérience un grand nombre de fois, on constate que ce rapport semble avoir une limite lorsque le nombre d'épreuves tend vers l'infini.Cette limite est appelée *probabilité de l'événement*.

[On ne peut répéter "une infinité" de fois une expérience sans la perturber car les objets physiques s'usent ! Dès la définition des probabilités il y a donc idéalisation de la réalité. Cependant "l'axiome des probabilités" est bien vérifié par l'expérience. L'étude pratique de cet axiome est l'objet de la statistique]

2 Ensembles probabilisés finis.

Pour décrire une expérience aléatoire on introduit un ensemble Ω , qui ici sera fini, dit ensemble des *événements élémentaires* ou [en confondant deux épreuves qui ont le même "résultat"] ensemble des *épreuves*.

[Une expérience aléatoire peut être décrite par différents ensembles selon les résultats auxquels on s'intéresse : pour décrire l'expérience "tirer une boule dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches" on peut prendre un ensemble Ω à 5 éléments "tirer une boule particulière" ou bien un ensemble à 2 éléments "tirer une boule blanche" et "tirer une boule noire"]

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω s'appelle ensemble des *événements*.
[comme on travaille sur un ensemble fini, il est inutile de parler de tribu]

Une *probabilité* sur Ω est une application p de Ω dans $[0,1]$ telle que :

$$\sum_{a\in\Omega} p(a) = 1$$

L'application p se prolonge à $\mathcal{P}(\Omega)$ en posant pour toute partie A de Ω :

$$p(A) = \sum_{a\in A} p(a)$$

PROBABILITE

PROPOSITION 1 : la probabilité p est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui vérifie $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$ et $p(A\cup B) = p(A)+p(B)$ si $A\cap B = \emptyset$.

[ces propriétés des probabilités servent souvent de définition. La définition que nous avons donnée est plus simple à utiliser dans les démonstrations]

PROPOSITION 2 : Soit A et B des parties de Ω et A^c le complémentaire de A. On a $p(A^c) = 1 - p(A)$ et $p(A) + p(B) = p(A\cup B) + p(A\cap B)$.

[dans p(A)+p(B), comme dans p(A∪B)+p(A∩B), les éléments de A ou (exclusif) B comptent une fois ceux de A et B deux fois]

REMARQUE : pour associer une probabilité à une expérience aléatoire on peut :

- utiliser la méthode statistique c'est à dire faire "un grand nombre" d'épreuves et calculer le pourcentage d'apparition de chaque événement.
- utiliser les symétries physiques de cette expérience (les boules sont identiques, le dé est un cube,...). Cette méthode à l'avantage de ne pas nécessiter la réalisation effective de l'expérience. Son inconvénient est de dépendre des connaissances de celui qui l'utilise (dés pipés, dans une loterie on peut soit gagner soit perdre d'où une chance sur deux de gagner !)

Si on veut appliquer la deuxième méthode il faut, au moins dans un premier temps, choisir l'ensemble Ω de façon à avoir des événements élémentaires "symétriques". Il sont alors *équiprobables* : chacun d'entre eux a la probabilité 1/card(Ω). On trouve ainsi pour tout événement A la formule fameuse :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

PROPOSITION 3 (*formule de Poincaré*) : Pour tout événements $A_1,...,A_n$ on a :

$$p(A_1\cup...\cup A_n) = \sum_i p(A_i) - \sum_{i<j} p(A_i\cap A_j) + ...$$
$$+ (-1)^{k+1}\sum_{i_1<...<i_k} p(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}) + ... + (-1)^{n+1}p(A_1\cap...\cap A_n)$$

[démonstration par récurrence sur n . La proposition 2 donne le cas n = 2 et $p(A_1\cup...\cup A_{n+1})=p(A_1\cup...\cup A_n)+p(A_{n+1})-p((A_1\cup...\cup A_n)\cap A_{n+1})$. On applique la formule à $p((A_1\cup...\cup A_n)\cap A_{n+1})=p((A_1\cap A_{n+1})\cup...\cup(A_n\cap A_{n+1}))$ et à $p(A_1\cup...\cup A_n)$].

Exercice : on met "au hasard" n boules numérotées de 1 à n dans n boites numérotées de 1 à n . Calculer la probabilité pour qu'au moins une boule soit dans la boite portant son numéro.

[considérer les événements A_i : la ième boule est dans la ième boite]

3 Probabilités conditionnelles.

PROPOSITION 4 : soit A un événement de probabilité non nulle. l'application qui à toute partie B de Ω associe $p(B/A) = p(B\cap A)/p(A)$ est une probabilité.

[On a $\Sigma_{a\in\Omega} p(a/A)=\Sigma_{a\in A} p(a)/p(A)=1$ et $p(B/A)=\Sigma_{a\in B\cap A} p(a)/p(A)=\Sigma_{a\in B} p(a/A)$]

DEFINITION : $p(B/A)$ s'appelle *probabilité conditionnelle* de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

PROPOSITIION 5 (*théorème des probabilités composées*) : Pour tout événements $A_1,\ldots,A_n$ on a : $p(A_1\cap\ldots\cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times\ldots\times p(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$.

[démonstration immédiate]

Exercice : probabilité pour que les anniversaires de n personnes prises au hasard soient tous à des jours différents (29 février exclu).

[On considère les événements A_i : les i premières ont des anniversaires à des dates différentes. On a $p(A_{i+1}/A_1\cap\ldots\cap A_i) = p(A_{i+1}/A_i) = (365-i)/365$]

PROPOSITION 6 (*théorème de BAYES*) : soient $A, C_1,\ldots,C_n$ des événements tels que $C_i\cap C_j = \emptyset$ pour $i\neq j$ et $A \subset C_1\cup\ldots\cup C_n$. Alors $p(A) = \sum_j p(A/C_j)\, p(C_j)$ et

$$p(C_i/A) = \frac{p(A/C_i)p(C_i)}{\sum_j p(A/C_j)p(C_j)}.$$

car $p(C_i/A).p(A) = p(C_i\cap A) = p(A/C_i).p(C_i)$ ⇒ $p(C_i/A) = \frac{p(A/C_i).p(C_i)}{p(A)}$

[$\Sigma_j p(A/C_j)p(C_j) = \Sigma_j p(A\cap C_j) = p(A)$ et $p(A/C_i)p(C_i) = p(A\cap C_i)$]

Interprétation : l'événement A dépend de causes qui s'excluent mutuellement. Sachant que A est réalisé, la formule permet de connaitre la probabilité pour que ce soit par la ième cause.

Exercice : on a 3 urnes contenant des boules noires (disons 20,2,4) et des boules blanches (5,98,6). On tire une boule blanche. Probabilité pour que cette boule provienne de la première urne.

[on admet que les urnes sont équiprobables et qu'il en est de même des boules de chaque urne. Avec les données on trouve une probabilité de 10/89].

4 Evénements indépendants.

On dit que l'événement B est *indépendant* de l'événement A si $p(B/A) = p(B)$.

PROPOSITION 7 : les conditions : B est indépendant de A , A est indépendantde B et $p(A\cap B) = p(A)\, p(B)$ sont équivalentes.

[on parlera donc d'événements indépendants sans préciser l'ordre]

PROBABILITE

PROPOSITION 8 : si les événements A et B sont indépendants, il en est de même des couples d'événements $(A^C,B),(A,B^C)$ et (A^C,B^C).

[$p(A^c)p(B)=(1-p(A))p(B)=p(B)-p(A\cap B)$ et $p(B)=p(A^c\cap B)+p(A\cap B)$]

Exercice : vérifier que, au bridge, avoir un roi et avoir un as ne sont pas des événements indépendants. [passer aux événements complémentaires. On trouve $p(A^c)=p(R^c)=48!39!/35!52!$ et $p(A^c\cap R^c)=44!39!/31!52!$]

Des événements $A_1,\dots A_n$ sont dit *indépendants dans leur ensemble* si pour tout sous ensembles non vide I et J de $1,\dots,n$ tels que $I\cap J=\emptyset$ les événements $\cap_I A_i$ et $\cap_J A_i$ sont indépendants. Il est équivalent de demander que, pour tout $i_1,\dots i_p$ dans $1,\dots,n$, on ait $p(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_p}) = p(A_{i_1})\dots p(A_{i_p})$.

[ATTENTION : il ne faut pas confondre cette notion avec celle d'événements mutuellement indépendants, c'est à dire indépendants deux à deux]

5 Enchainement d'expériences aléatoires.

Nous nous intéressons maintenant au cas où l'expérience se décompose en sous-expériences successives (par exemple tirer une urne puis une boule dans cette urne, répéter plusieurs fois une même expérience,...). Du point de vue mathématique, l'ensemble Ω est alors un produit cartésien $\Omega_1\times\dots\times\Omega_n$, l'ensemble Ω_i correspondant aux "résultats" de la ième expérience.

NOTATION : pour toute partie A de Ω_i on pose $\overline{A} = \Omega_1\times\dots\times\Omega_{i-1}\times A\times\Omega_{i+1}\times\dots\times\Omega_n$.

[On confond souvent A et $\overline{A}$].

PROPOSITION 9 : si p est une probabilité sur Ω , l'application qui à toutepartie A de Ω_i associe $p_i(A) = p(\overline{A})$ définit une probabilité sur Ω_i appelée *probabilité marginale*.

[si a et b sont deux éléments distincts de Ω_i, $\overline{a}\cap\overline{b}=\emptyset$. D'autre part $\overline{A}=\cup_{a\in A}\overline{a}$. Il vient donc $p(\overline{A})=\Sigma_{a\in A}p(\overline{a})$. En particulier $\Sigma_{a\in\Omega_i}p(\overline{a})=p(\Omega)=1$]

PROPOSITIIION 5 bis (*théorème des probabilités composées*) : si, pour chaque indice i, A_i est un événement de Ω_i on a :

$$p(A_1\times\dots\times A_n) = p_1(\overline{A}_1) \times p(\overline{A}_2/\overline{A}_1) \times\dots\times p(\overline{A}_n/\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{n-1}).$$

[remarquer que $A_1\times\dots\times A_n = \overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_n$].

PROPOSITION 6 bis (*théorème de BAYES*) : soit $\Omega_1 = \{C_1,\dots,C_n\}$, $\Omega_2 = \{A,A^c\}$ et p une probabilité sur $\Omega_1\times\Omega_2$. Alors $p(\overline{C}_i/\overline{A}) = \dfrac{p(\overline{A}/\overline{C}_i)p_1(C_i)}{\sum_j p(\overline{A}/\overline{C}_j)p_1(C_j)}$.

PROBABILITE

6 Expériences indépendantes.

Si, pour chaque indice i, A_i est un événement de Ω_i, et si les événements $\overline{A}_i$ sont indépendants dans leur ensemble, on a $p(A_1\times\ldots\times A_n) = p_1(A_1)\ldots p_n(A_n)$. Lorsque cette situation se produit quel que soient les événements A_i, on dit que les n sous-expériences sont indépendantes [dans le sens où les résultats de l'une n'influencent pas les résultats des autres]. La proposition suivante montre qu'on peut toujours construire une probabilité pour laquelle les expériences sont indépendantes.

PROPOSITION 10 : soit $(\Omega_1,p_1),\ldots,(\Omega_n,p_n)$ des ensembles probabilisés. Il existe sur l'ensemble $\Omega = \Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ une unique probabilité p telle que, si A_i est un événement de Ω_i, on ait $p(A_1\times\ldots\times A_n) = p_1(A_1)\ldots p_n(A_n)$.

[p est définie par $p((a_1,\ldots,a_n))=p_1(a_1)\ldots p_n(a_n)$. Tout découle alors de la formule $\Sigma_{a\in A_1\cap\ldots\cap A_n} p(a) = \Sigma_{a_1\in A_1} p(a_1)\ldots p(a_n) = \Sigma_{a_1\in A_1} p_1(a_1)\ldots\Sigma_{a_n\in A_n} p_n(a_n)$ qui, appliquée à Ω, donne en particulier $\Sigma_{a\in\Omega}\, p(a) = p(\Omega_1)\ldots p(\Omega_n) = 1$]

La probabilité définie dans la proposition 10 s'appelle *probabilité produit.*

Exercice (schéma de Bernoulli) : on répète n fois, de manière indépendante, une expérience donnant un résultat "favorable" avec une probabilité p. Trouver la probabilité d'obtenir k fois (exactement) un résultat favorable.

[Ω est le produit cartésien de n ensembles à deux éléments $\{F_i,D_i\}$ avec $p_i(F_i)=p$, donc $p_i(D_i)=1-p=q$. La probabilité d'un événement élémentaire est alors de $p^{nombredeF}\times q^{nombredeD}$. et la probabilité cherchée est $C_n^k p^k q^{n-k}$].

7 Variables aléatoires.

Il arrive souvent que les résultats d'une expérience aléatoire soient sous forme numérique. Pour étudier cette situation, on appelle *variable aléatoire* toute application X d'un ensemble probabilisé Ω dans $\mathbb{R}$. Par convention on note $(X=t)$ l'événement $X^{-1}(t)$, $(X<t)$ l'événement $X^{-1}(]-\infty,t[)$,...

[l'ensemble des variables aléatoires sur Ω est un anneau]

A toute variable aléatoire on associe sa *fonction de répartition* F_X définie par $F_X(t) = p(X<t)$ .C'est une fonction positive, non décroissante, continue à gauche, telle que $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(\infty) = 1$.

On dira que deux variables aléatoires X et Y ont *même loi* si elles ont même fonction de répartition. Pour cela (il faut et) il suffit que, pour tout réel t, on ait $p(X=t) = p(Y=t)$ [ces deux probabilités sont nulles sauf pour un nombre fini de t].

PROBABILITE

ATTENTION : La fonction de répartition caractérise la variable aléatoire indépendamment de l'espace Ω choisi pour représenter l'expérience en ce sens que, pour étudier une variable aléatoire X, il suffit de connaitre la probabilité des événements "élémentaires" $(X=t)$. Ceci n'est plus vrai si on s'intéresse simultanément à deux (ou plus) variables aléatoires X,Y. Dans ce cas les événements élémentaires sont $(X=t)\cap(Y=u)$.

On dit que deux variables aléatoire X et Y, définies sur le même ensemble Ω sont *indépendantes* si, pour tout couple (t,u) de réels, les événements $(X=t)$ et $(Y=u)$ sont indépendants. plus généralement, on dira que les variables aléatoires X_i sont indépendantes dans leur ensemble si les événements $(X_i=t_i)$ sont indépendants dans leur ensemble.

Exercice : montrer que si X et Y sont indépendantes, il en est de même de X^2 et Y^2[séparer les cas t,u>0,=0 et <0 et découper les événements en quatre].

PROPOSITION 11 : **soit $(\Omega_1,p_1),\dots,(\Omega_n,p_n)$ des ensembles probabilisés et, pourchaque indice i, une variable aléatoire X_i sur Ω_i . On met sur l'ensemble $\Omega = \Omega_1\times\dots\times\Omega_n$ la probabilité produit. Alors les variables aléatoires $\overline{X}_i$ définies par $\overline{X}_i(a_1,\dots,a_n) = X_i(a_i)$ sont indépendantes dans leur ensemble.**

[de $(\overline{X}_1=t_1)=\overline{(X_1=t_1)}$ on déduit $p((\overline{X}_1=t_1)\cap\dots\cap(\overline{X}_n=t_n)) = p((X_1=t_1)\times\dots\times(X_n=t_n)) = p_1(X_1=t_1)\dots p_n(X_n=t_n)=p(\overline{X}_1=t_1)\dots p(\overline{X}_n=t_n)$].

Interprétation : si on fait une suite d'expériences indépendantes, des variables aléatoires dépendant d'expériences différentes sont indépendantes.

8 Moyenne, variance, écart-type.

On appelle *moyenne* de la variable aléatoire X la quantité :

$$E(X) = \sum_{a\in\Omega} X(a)\ p(a) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t\ p(X=t)$$

en particulier deux variables aléatoires de même loi ont même moyenne.

PROPOSITION 12 : **soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble et λ un réel. On a $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$. Si, de plus, X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)\ E(Y)$.**

[$E(XY)=\Sigma t p(XY=t)=\Sigma_{u,v} uvp(X=u)p(Y=v)=\Sigma up(X=u)\ \Sigma vp(Y=v)=E(X)E(Y)$]

La proposition 12 se généralise immédiatement à nvariables aléatoire (indépendantes dans leur ensemble).

Exercice : On met 3 boules "au hasard" dans 3 urnes. On considère les variables aléatoires X = nombre de boules dans la première urne et Y = nombre d'urnes occupées. Montrer que E(XY)=E(X)E(Y) mais que X et Y ne sont pas

indépendantes.

[avec X_i=nombre de boules dans la ième urne on a $\Sigma E(X_i)=E(3)=3$ ce qui donne $E(X)=1$ et $\Sigma E(X_iY)=E(3Y)=3E(Y)$ d'où $E(XY)=E(Y)=E(X)E(Y)$. Cependant les événements $(X=3)$ et $(Y=3)$ ne sont pas indépendants].

On appelle *variance* de la variable aléatoire X la quantité :

$$V(X) = E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{t\in\mathbb{R}} t^2\, p(X=t) - E(X)^2$$

La formule $E[(x-a)^2] = V(X) + (E(X-a))^2$ montre que $V(X)$ est aussi la valeur minimale de $E[(x-a)^2]$ lorsque a parcourt $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 13 : **la variance $V(X)$ est positive. Elle s'annule si et seulement si $p(X=E(X))=1$.**

On appelle *écart-type* de la variable aléatoire X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{F(X)}$.

PROPOSITION 14 : **soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble.** On a $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **si et seulement si** $E(XY) = E(X)\ E(Y)$.

[par exemple si X et Y sont indépendantes].

Exercice : dans le schéma de Bernoulli on note X_i la variable aléatoire qui vaut *1* si le résultat de la ième expérience est favorable et *0* sinon et X la somme des X_i. Calculer $V(X)$. [on obtient ainsi $\Sigma_k C^k_n p^k q^{1-k} (k-np)^2=np(1-p)$]

L'écart-type (où la variance) donne une estimation de la manière dont une variable aléatoire s'écarte de sa valeur moyenne. Plus précisément on a :

PROPOSITION 15 *(inégalité de Bienaymé-Tchebichef)* : $p(|X-E(X)|>\sqrt{a}) < V(x)/a$.

[$v(X) = \Sigma t p(|X-E(X)|=\sqrt{t}) \geq \Sigma_{t>a}\ a\ p(|X-E(X)|=\sqrt{t}) = a\ p(|X-E(X)|>\sqrt{a})$].

Exercice : on fait 100 parties de pile ou face. Montrer que la probabilité d'obtenir entre 40 et 60 fois pile est au moins de 3/4.

WTHEOREME 16 *(loi faible des grands nombres)* : **soit $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi deux à deux indépendantes. Alors**

$$lim_{n\to\infty}\ p(|\frac{1}{n}\ \Sigma\ X_i\ -\ E(X)|>\varepsilon) = 0$$

[En appliquant la proposition 15, on trouve $p(|\frac{1}{n}\ \Sigma\ X_i\ -\ E(X)|>\varepsilon) < V(X)/n\varepsilon^2$]

Appliqué à une variable aléatoire associée ci-dessus au schéma de Bernoulli, ce théorème montre que, si on répète, de manière indépendante, un grand nombre de fois une même expérience le rapport entre le nombre de fois ou l'évenement s'est produit et le nombre total d'expériences a pour limite la probabilité de l'évenement. Nous avons ainsi démontré dans notre modèle l'axiome qui nous avait servi à le construire.

Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité, fonction de répartition. Espérance mathématique, variance, écart-type. Exemples: loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binômiale.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé fini.

I. Variable aléatoire réelle.

définition : Une application X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un ensemble $(\Omega', \mathcal{A}') \subset \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire si et seulement si

$$\forall a \in \Omega', \quad X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) = a\} \in \mathcal{A}.$$

Dans la suite, on se limitera au cas où Ω' est fini.

exemple : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ $\quad \mathcal{A} = \{\phi, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \Omega\}$

$X : \omega_1 \mapsto 1, \ \omega_2 \mapsto 1, \ \omega_3 \mapsto 2$ $\qquad Y : \omega_1 \mapsto 1, \ \omega_2 \mapsto 2, \ \omega_3 \mapsto 3$

$X^{-1}(\{1\}) = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{A}$ $\quad X^{-1}(\{2\}) = \{\omega_3\} \in \mathcal{A}$ $\quad X$ est une variable aléatoire.

mais $Y^{-1}(\{1\}) = \{\omega_1\} \notin \mathcal{A}$ $\quad Y$ n'est pas une variable aléatoire (on note va)

Cas particulier : lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une va.

Théorème et définition : Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{P}(\Omega'))$ une variable aléatoire et p_X l'application définie par

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\Omega') \longrightarrow [0,1] \\ A' \longmapsto p_X(A') = p(X^{-1}(A')) \end{cases}$$

$(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), p_X)$ est un espace probabilisé et p_X est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

dém : on vérifie que p_X est une probabilité :

- $p_X(\Omega') = p(X^{-1}(\Omega')) = p(\Omega) = 1$
- Soient $A', B' \in \mathcal{P}(\Omega')$ tels que $A' \cap B' = \phi$.

on veut montrer que $p_X(A' \cup B') = p_X(A') + p_X(B')$.

$p_X(A' \cup B') = p(X^{-1}(A' \cup B')) = p(X^{-1}(A') \cup X^{-1}(B'))$

$X^{-1}(A') \cap X^{-1}(B') = X^{-1}(A' \cap B') = X^{-1}(\phi) = \phi$ donc $X^{-1}(A')$ et $X^{-1}(B')$ sont incompatibles.

et on a $p_X(A' \cup B') = p(X^{-1}(A')) + p(X^{-1}(B')) = p_X(A') + p_X(B')$.

notation : $\Omega' = \{x_1, \dots, x_n\}$

$p_X(\{x_i\}) = p(X^{-1}(\{x_i\})) = p(\{\omega \in \Omega, \ X(\omega) = x_i\}) = p(X = x_i)$

on remarque qu'on a toujours $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = p(\Omega) = 1$.

II. Fonction de répartition de X :

$\Omega' = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_i < x_{i+1}$. $\quad F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x) = p(X < x)$

(ou $F(x) = p(X \leq x)$ suivant les livres).

1) $\forall x \leq x_1$, $F(x) = 0$ car $X < x$ est impossible

$\forall x > x_n$, $F(x) = 1$ car $X < x$ est certain

2) F est constante sur les intervalles du type $]x_i, x_{i+1}]$:

soit $x \in]x_i, x_{i+1}]$, $\{X < x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \dots \cup \{X = x_i\}$

$= \{X \leq x_i\} = \{X < x_{i+1}\} \Rightarrow F(x) = F(x_{i+1})$.

C'est à dire que F est une fonction en escalier, continue sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}]$, continue à gauche et discontinue (admet une limite) à droite en x_i.

3) F est croissante : si $x \leq y \Rightarrow \{X < x\} \subset \{X < y\}$

donc $p(X < x) \leq p(X < y)$. C'est à dire $F(x) \leq F(y)$

[Graphe de F en escalier : valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 en abscisse, 1 et $p(X=x_1)$ en ordonnée]

4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $p(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

application : $p(X = x_i) = p(x_i \leq X < x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ donc F étant donnée, on a la loi de X.

III. Espérance, variance, écart-type :

$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega' = \{x_1, \dots, x_n\}, \mathcal{P}(\Omega'))$ on note $p_i = p(X = x_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

définitions : on appelle

- espérance mathématique de X, le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

- variance de x, le réel $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$.
- écart type de x, le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

<u>Théorème de Köenig</u> (admis) : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 - E(X)^2$ (facile à montrer).

IV Exemples

1) <u>loi uniforme</u> : $\Omega' = \{x_1, \dots, x_n\}$ $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

(Par exemple, jet d'un dé équilibré $x_i \in \{1, \dots, 6\}$ et $P(X = x_i) = \frac{1}{6}$, $\forall i$.)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \text{moyenne au sens usuel.}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

2) <u>loi de Bernoulli</u> : $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espace probabilisé avec $\mathcal{A} = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$.

$A \in \Omega$ est un événement $p(A) = p$ et $p(\bar{A}) = 1 - p$.

(Par exemple, jet d'une pièce équilibrée, et A est l'événement "obtenir un pile". On a $p(A) = p(\bar{A}) = \frac{1}{2}$)

On définit une va telle que X vaut 1 si l'événement A est réalisé et vaut 0 s'il n'est pas réalisé

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

$E(X) = 0\,(1-p) + 1\; p = p$

$V(X) = 0^2\,(1-p) + 1^2 p - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

3) <u>loi binômiale</u> : $\Omega_1 = \{(\omega_1, \dots, \omega_n)$ où $\omega_i = A$ ou $\bar{A}\}$

On réalise l'expérience précédente n fois de suite de façon indépendante et la va X_n prend pour valeur le nombre de fois où A s'est réalisé.

(par exemple, on jette une pièce n fois de suite)

$\Omega' = \{0, \dots, n\}$ $\omega = (A, A, \bar{A}, A, \bar{A}, \bar{A}, \dots)$

$$p(X_n = k) = C_n^k\, p(A)^k\, p(\bar{A})^{n-k} = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

(on remarque que $\sum_{k=0}^{n} p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$)

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} p(X_n = k)\, k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k\, p^k\, (1-p)^{n-k} = [\dots] = np$$

$$V(X_n) = n\,p(1-p)$$

Leçon n° 5 Probabilité conditionnelle, événements indépendants
(on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini)
Applications à des calculs de probabilités

1

Soit $(\Omega, \mathcal{D}, p)$ un espace probabilisé

I Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle s'introduit en particulier à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire une information partielle est fournie à l'expérimentateur.

Exemple Jet de deux dés parfaits

$\Omega = [1,6] \times [1,6]$ $\quad \omega = (i,j) \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 6$

Soit A l'événement " la somme des points obtenus est au moins égale à 10 "

(i) Supposons que le premier dé amène un 3 (événement B).
L'événement A est alors devenu irréalisable. On dit que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle ce que l'on note $p(A/B) = 0$

(ii) Supposons maintenant que le premier dé amène un 6 (événement C)
on sait alors que pour atteindre ou dépasser 10, il faut que le deuxième dé amène 4, 5 ou 6. L'expérimentateur aura donc 3 chances sur 6 d'y parvenir d'où $p(A/C) = \frac{1}{2}$

Définition Soit B un événement de probabilité non nulle

Soit $A \in \mathcal{B}$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé le nombre noté $p(A/B)$ ou $p_B(A)$ défini par $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Proposition L'application p_B de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ définie par pour tout $A \in \mathcal{D}$ $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$

Démonstration (a) $p(A/B)$ est bien compris entre 0 et 1
car $0 \leqslant p(A \cap B) \leqslant p(B)$

(b) $p_B(\Omega) = \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$

(c) Soient $A \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}$ tq $A \cap C = \emptyset$

Déterminons $p(A \cup C / B) = \frac{p(B \cap (A \cup C))}{p(B)}$

$B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$ (la loi $\cap$ est distributive par rapport à la loi $\cup$)

D'autre part $(A \cap B) \cap (B \cap C) = B \cap \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset} = \emptyset$

donc puisque p est une probabilité $p(B \cap (A \cup C)) = p((B \cap A) \cup (B \cap C))$ $= p(B \cap A) + p(B \cap C)$

d'où $p_B(A \cup C) = \frac{p(A \cap B) + p(B \cap C)}{p(B)} = p_B(A) + p_B(C)$

Remarque • Pour tout $A \in \mathcal{D}$ $\quad p(A) = p_\Omega(A)$

• $p_B(B) = 1$

p_B est une probabilité sur l'événement B qui est toujours réalisé. On se place donc sur un nouvel univers Ω' inclus dans Ω qui restreint le réalisé

II Applications

(1) Formule des probabilités composées

Si B est un événement de probabilité non nulle, on peut énoncer la formule des probabilités composées : $p(A \cap B) = p(B)\, p(A/B)$ pour tout $A \in \mathcal{D}$

Généralisation Soient $A_1, A_2 \dots A_m$ m événements d'un espace probabilisé vérifiant $p(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{m-1}) > 0$ alors

$p(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_m) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1 \cap A_2) \dots p(A_m/A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})$

Les probabilités conditionnelles écrites dans cette relation ont un sens
car $p(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) > 0$ implique $\forall i \in [1, m-1]$
$p(A_1 \cap \dots \cap A_i) > 0$ par croissance de la probabilité

(2) Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1 \dots A_m\}$ un système complet d'événements tous de

probabilité non nulle ($i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$ et $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m = \Omega$)
Alors pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $p(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i)\, p(B/A_i)$

Démonstration $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

et donc $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m) = \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)$

Distributivité de l'intersection sur la réunion

La réunion est disjointe puisque les A_i sont deux à deux disjoints

$p(B) = p\left(\bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i)\, p(B \backslash A_i)$

Formule des probabilités composées

(3) Formule du révérend Thomas Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle

$p(A \cap B) = p(B)\, p(A/B) = p(A)\, p(B/A)$

d'où $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A)\, p(B/A)}{p(B)}$

Soit $\{A_1 \dots A_m\}$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle

Pour tout événement B de probabilité non nulle

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(A_1)p(B/A_1) + \dots + p(A_m)p(B/A_m)} \qquad i = \{1 \dots m\}$$

. Formule de Bayes (probabilité des causes)

Démonstration Soit $B \subset \mathcal{B}$ tq $p(B) > 0$

Formule des probabilités totales $p(B) = \sum_{j=1}^{m} p(A_j)\, p(B/A_j)$

Formule des probabilités composées

$p(A_i/B) = \dfrac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(B)}$

par définition

d'où $p(A_i/B) = \dfrac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{m} p(A_j)\, p(B/A_j)}$

→ En particulier pour $\{A, \bar{A}\}$ $\quad p(A/B) = \dfrac{p(A)\, p(B/A)}{p(A)p(B/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A})}$

III Indépendance

Définition Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

→ Si $p(A) \neq 0$ on sait que $p(A)\, p(B/A) = p(A \cap B)$

d'où le théorème : A étant un événement de probabilité non nulle
A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B est égale à la probabilité de B sachant que A a eu lieu
ie $p(B) = p(B \backslash A)$

Remarques . L'indépendance est une relation symétrique entre les événements

. Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou la non réalisation de l'un d'entre eux n'influe pas sur la réalisation ou la non réalisation de l'autre

. A et ϕ sont indépendants quelle que soit la probabilité p

. Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité

L'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité et donc s'exprime dans $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ alors que l'incompatibilité est la disjonction des événements et donc s'exprime dans $(\Omega, \mathcal{B})$

Exemple On lance deux dés parfaits

A_1 : Événement « le premier dé amène un nombre pair »

A_2 : Événement « le premier dé amène un 3 »

$p(A_1) = \dfrac{1}{2}$ $\quad p(A_2) = \dfrac{1}{6}$

$A_1 \cap A_2 = \phi$

Donc $p(A_1 \cap A_2) = 0$ mais $p(A_1)\, p(A_2) = \dfrac{1}{12}$

A_1 et A_2 sont donc deux événements incompatibles mais ils ne sont pas indépendants.

Proposition Soient $A, B \in \mathcal{D}$ si A et B sont indépendants.
Alors A et $\bar{B}$ sont indépendants, de même les événements $\bar{A}$ et B ainsi que les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Dém Prenons $A, B \in \mathcal{D}$

Montrons que A et $\bar{B}$ sont indépendants

$B \cup \bar{B} = \Omega$ d'où $A = (B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)$ Réunion disjointe

donc $p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B)$

d'où $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(\bar{B})$

A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

Montrons que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

$\bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ donc $p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$

Or A et $\bar{B}$ sont indépendants donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{B}) - p(A)p(\bar{B}) = p(\bar{A})p(\bar{B})$

IV Exemples

(1) On considère une famille ayant deux enfants. Il existe donc quatre compositions possibles de la famille FF, FG, GF, GG (dans l'ordre de naissance) que nous supposerons équiprobables

(a) Calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon

B : « L'aîné est un garçon »

A : « Les deux enfants sont des garçons »

On doit donc déterminer $p(A/B)$

$$p(A/B) \underset{\text{par def}}{=} \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

(b) Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon

C : « Il y a au moins un garçon »

On cherche à calculer $p(A/C)$

$$p(A/C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{p(A)}{1 - p(\bar{C})} = \frac{1/4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$\bar{C}$: « Il n'y a pas de garçon »

[illegible]

→ 2) On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant initialement chacune deux boules noires et trois boules blanches. On tire une boule de l'urne U_1, on note sa couleur et on la remet dans l'urne U_2. On tire alors une boule de l'urne U_2. Les tirages se faisant au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir deux fois une boule noire

N_1 « La boule tirée de U_1 est noire »

N_2 « La boule tirée de U_2 est noire »

On cherche à calculer $p(N_1 \cap N_2)$

On ne peut pas déterminer directement $p(N_1 \cap N_2)$ car il n'est pas facile de mettre en évidence un univers où les événements sont équiprobables. On applique donc la formule des probabilités composées

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)p(N_2/N_1)$$

$p(N_1) = \frac{2}{5}$ Probabilité de tirer une boule noire sachant que l'urne U_1 contient deux boules noires et 3 boules blanches

$p(N_2/N_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Probabilité de tirer une boule noire sachant que l'urne U_2 contient maintenant 3 boules blanches et 3 boules noires

d'où $p(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

→ (3) On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{2}$. On lance le dé choisi et on obtient 6

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé

T « Le dé est pipé »

S « On obtient 6 au premier lancer »

On doit déterminer $p(T/S)$

$\{T, \bar{T}\}$ est un système complet d'événements

$p(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $\quad p(\bar{T}) = 1 - p(T) = \frac{3}{4}$

On sait de plus que $p(S/T) = \frac{1}{2}$

On obtient donc en utilisant la formule de Bayes

$$p(T/S) = \frac{p(T)p(S/T)}{p(T)p(S/T) + p(\bar{T})p(S/\bar{T})}$$

$$\text{d'où } p(T/S) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$$

car $p(S/\bar{T}) = \frac{1}{6}$ Probabilité d'obtenir 6 en lançant un dé non pipé

Nombres premiers entre eux. PGCD et PPCM de 2 entiers naturels

Rappel: Division euclidienne. Si G est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à zéro, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = m\mathbb{Z}$. m est appelé le générateur de G

I Nombres premiers entre eux

1) Notation: Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On note D_a l'ensemble des diviseurs de a c.à.d.

$$D_a = \{ q \in \mathbb{N}^* \ , \ \exists t \in \mathbb{N}^* \ a = qt \}$$

Remarque : $1 \in D_a$ et si $q \in D_a$ alors $1 \leq q \leq a$.

2) Définition: Deux nombres a et $b \in \mathbb{N}^*$ sont dits premiers entre eux ssi $D_a \cap D_b = \{1\}$

II PGCD de deux entiers naturels a et $b \in \mathbb{N}^*$

a) Remarque: Si a et $b \in \mathbb{N}^*$, alors $D_a \cap D_b$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ majoré par $\min(a,b)$, donc admet un plus grand élément.

b) Définition : le PGCD de a et $b \in \mathbb{N}^*$ est le plus grand élément de l'ensemble $D_a \cap D_b$. On le note $a \wedge b$.

c) Caractérisation du PGCD:

Théorème: i) $a \wedge b$ est le générateur du sous groupe $G = \{ax + by, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\} \neq \{0\}$

ii) $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Preuve: i) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = d\mathbb{Z}$. Or $a \in G = d\mathbb{Z}$; il existe donc $u \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = dq$ et $d \in D_a$. De même $d \in D_b$. Donc $d \in D_a \cap D_b$ et $d \leq a \wedge b$

En outre $d \in G$. Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$d = au + bv \quad (*) .$$

Or il existe $(t,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a = (a \wedge b)t$ $b = (a \wedge b)r$ et en remplaçant dans $*$, on obtient $d = (a \wedge b)(tu + rv)$ d'où $d \geq a \wedge b$.

ii) De l'écriture $(*)$, il vient que tout diviseur de a et b divise $d = a \wedge b$. Donc $D_a \cap D_b \subset D_{a \wedge b}$.

En outre $D_{a \wedge b} \subset D_a \cap D_b$ car $a \wedge b$ divise a et b et alors tout diviseur de $a \wedge b$ divise a et b.

d) Propriétés du PGCD.

i) $a \wedge b = b \wedge a$ (car $D_a \cap D_b = D_b \cap D_a$)

ii) $ka \wedge kb = k(b \wedge a)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (car G devient kG)

iii) $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \wedge b = au + bv$ ($d = a \wedge b$ et on utilise $*$)

iv) $a \wedge b = 1 \iff \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 = au + bv$

v) $\frac{a}{a \wedge b} \wedge \frac{b}{a \wedge b} = 1$.

Preuve de iv) et v)

iv) : $\Leftarrow$ si q divise a et b alors q divise 1. Donc $q = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1$

v) on a d'après iii) $a \wedge b = au + bv$ $\Rightarrow 1 = \frac{a}{a \wedge b} u + \frac{b}{a \wedge b} v$.

e) Théorème de Gauss : Si $a \wedge b = 1$ et si a divise bc alors a divise c

Preuve : $a \wedge b = 1 \Rightarrow ac \wedge bc = c$. Or a divise ac et bc, donc divise leur PGCD

III PPCM de deux entiers naturels a et b

a) Définition : Soit a et $b \in \mathbb{N}^*$. $a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ non vide (contient ab), donc contient un plus petit élément noté $\underline{a \vee b}$, appelé PPCM de a et b.

Remarque 1) $\max(a,b) \leq a \vee b \leq ab$ 2) $a\mathbb{N}^* = b\mathbb{N}^* \Leftrightarrow a = b$ car $a \in a\mathbb{N}^* \Rightarrow a \in$

b) Caractérisation du P.PCM

Théorème : $a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^* = a \vee b \, \mathbb{N}^*$

Preuve : i) $a \vee b \, \mathbb{N}^* \subset a\mathbb{N}^*$ car $a \vee b \in a\mathbb{N}^*$. Donc $a \vee b \, \mathbb{N}^* \subset a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*$

ii) $a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^* \subset a \vee b \, \mathbb{N}^*$: soit $s \in a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*$. Effectuons la division euclidienne de s par $a \vee b$. $s = (a \vee b)q + r$ avec $0 \leq r < a \vee b$.

Si $r = 0$ alors $q \neq 0$ et $s \in (a \vee b)\mathbb{N}^*$. Sinon $s = aq_1$ car $s \in a\mathbb{N}^*$ et $a \vee b = aq_2$ et alors $s = aq_1 = aq_2 q + r$ d'où $r = a(q_1 - q_2 q)$ et $r \in a\mathbb{N}^*$

De même $r \in b\mathbb{N}^*$. D'où $r \in a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*$ et $r \geq a \vee b$. Donc $r \neq 0$ impossible

c) Propriétés de $a \vee b$

i) $ca \vee cb = c(a \vee b)$ $\forall c \in \mathbb{N}^*$

ii) $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \vee b = ab$

iii) $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$

iv) $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = ab$

Preuve : i) De façon générale si A et B sont 2 ensembles de $\mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{N}^*$ alors $cA \cap cB = c(A \cap B)$ ($x \in cA \cap cB \Leftrightarrow \begin{cases} x = ca = cb \\ a \in A \; b \in B \end{cases} \Leftrightarrow x = ca, \; a \in A \cap B \Leftrightarrow x \in c(A \cap B)$

ii) $a \vee b \in a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*$. Donc $a \vee b = aq = bs$. D'après le Théorème de Gauss a divise s et $a \vee b = bas'$ et $a \vee b \geq ab$

iii) $\frac{a}{a \wedge b} \wedge \frac{b}{a \wedge b} = 1$ d'après II d v). Or D'après III c ii) et d'après III c i)

$$\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} = \frac{ab}{(a \wedge b)^2}$$

$$\left(a \wedge b \frac{a}{a \wedge b}\right) \vee \left(a \wedge b \frac{b}{a \wedge b}\right) = \frac{ab}{a \wedge b} = a \vee b$$

IV Applications

1) $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ssi $a \wedge m = 1$

2) $a \wedge m = 1 \Leftrightarrow a^i \wedge m = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$

Preuve $\Leftarrow$: $1 = a^i u + mv = a.(a^{i-1}u) + mv$ donc $a \wedge m = 1$

$\Rightarrow$: $1 = au + mv \Rightarrow 1 = 1^i = (au + mv)^i = a^i u^i + C_i^1 a^{i-1} u^{i-1} mv + \dots + m^i v^i$

$1 = a^i u^i + mr = a^i u' + mr$

3) Calcul du pgcd (Euclide



RACINES N^ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Dans **R**, l'équation $x^2+1 = 0$ n'a pas de solution. Elle en a par contre 2 dans **C**, à savoir i et $-i$. On se propose dans cette leçon d'étudier les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans **C** (où $n \in \mathbb{N}^*$), c'est à dire les solutions de l'équation : $x^n = 1$.

I. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

THEOREME 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $x^n = 1$ a exactement n racines distinctes $\omega_k (k=0,\dots,n-1)$, où : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

PREUVE : Puisque **C** est un corps, $x^n = 1$ a au plus n racines. On a de plus :

$$\omega_k^n = \left[e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right]^n = 1.$$

Enfin, $\omega_k = \omega_{k'} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} (2\pi) \rightarrow 2(k'-k)\pi = 2mn\pi \ (m \in \mathbb{N})$.

Donc $k'-k$ est multiple de n. Or $|k'-k| < n$. Donc $k=k'$. Les ω_k sont distincts.

EXEMPLES : . $n=3$: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = j$, $\omega_2 = j^2$. Les points d'affixes $1, j, j^2$ forment un triangle équilatéral.

. $n=4$: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = i$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = -i$. Les points d'affixe ω_k forment les sommets d'un carré. On note U_n l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

THEOREME 2 :

a) U_n est un groupe multiplicatif.

b) U_n est cyclique, et ω_k est générateur si et seulement si k et n sont premiers entre eux. ($k \in \{1,\dots,n-1\}$)

a) Immédiat.

b) On a clairement : $\omega_k = \omega_1^k$. Donc ω_1 engendre U_n : ce groupe est

II. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul.

THEOREME 7 : Soit $c \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = c$ a n racines distinctes, et si z_0 est l'une d'elles, les autres sont $z_0\omega_1, \dots, z_0\omega_{n-1}$, où les ω_k sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Si $c = |c|\, e^{i \operatorname{Arg} c}$, les n racines de $z^n = c$ sont

$$z_k = \sqrt{|c|}\; e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} c}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)} \qquad k=0,\dots,n-1.$$

Preuve immédiate : $z^n = c \leftrightarrow \frac{z^n}{z_0^n} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ si $z_0^n = c$.

L'étude de l'équation du second degré est réservée à une autre leçon. Cependant, il faut savoir résoudre :

Exercice 8 : Résoudre $(x+iy)^2 = a+ib$.

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(-y^2) = a \\ x^2(-y^2) = -b^2/4 \\ bxy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ bxy > 0 \end{cases}$$ d'où les solutions si $b \neq 0$

Si $b=0$ et $a \geq 0$ $x+iy = \pm\sqrt{a}$, et si $b=0$ $a \leq 0$ $x+iy = \pm i\sqrt{-a}$.

III. Interprétation géométrique (plan affine euclidien orienté).

Soit $M_0,\dots,M_{n-1}$ les points du plan dont les affixes sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On définit un polygone régulier convexe à n côtés comme une figure directement semblable à $\{M_0,\dots,M_{n-1}\} = \Gamma_n$.

PROPOSITIONS 9 :

a) O est l'isobarycentre de Γ_n

b) $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}}) = \frac{2\pi}{n}$ $(i=0,\dots,n-2) = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0})$



donc cyclique. De plus, d'après l'identité de Bezout :

$$k \wedge n = 1 \iff ak+bn = 1 \iff \forall k' \;\; k' = akk'+k'bn \iff \omega_{k'} = (\omega_k)^{ak'}.$$

COROLLAIRE 3 :

a) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$, b) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^h = \begin{cases} 0 \text{ si } h \notin n\mathbb{Z} \\ n \text{ si } h \in n\mathbb{Z} \end{cases}$

PREUVE :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^h = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kh} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1^h)^k = \begin{cases} n \text{ si } \omega_1^h = 1, \text{ soit si } h \in n\mathbb{Z} \\ \dfrac{\omega_1^{nh}-1}{\omega_1 - 1} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE 4 : Les racines réelles de $x^n = 1$ sont 1 si n est impair, $\{-1,1\}$ si n est pair. Les autres racines sont conjuguées 2 à 2.

THEOREME 5 : L'application $k \to \omega_k$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(U_n,.)$, dont le noyau est $n\mathbb{Z}$.

Preuve immédiate. On en déduit que $U_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

THEOREME 6 : Tout sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*,.)$ est isomorphe à un groupe U_n.

Soit $G = \{Z_o,\ldots,Z_{p-1}\}$ un tel sous-groupe. Soit Z_k fixé dans G.

Puisque G est un groupe, $Z \to Z_k Z$ est une bijection de G.

Puisque G est commutatif, on a les égalités :

$$Z_o Z_1 \ldots Z_{p-1} = Z_o Z_k Z_1 Z_k \ldots Z_{p-1} Z_k = (Z_k)^p Z_o \ldots Z_{p-1}.$$

D'où $(Z_k) = 1$, ce qui prouve que G est U_p.

c) $M_1 M_{1+1} = 2|\sin \frac{\pi}{n}| = M_{n-1} M_o$ $(1=0,\ldots,n-2)$.

a) et b) immédiats. c) $M_o M_1 = |1-e^{\frac{2i\pi}{n}}| = |e^{\frac{i\pi}{n}}||e^{-\frac{i\pi}{n}} - e^{\frac{i\pi}{n}}| = 2|\sin \frac{\pi}{n}| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$

Application : Calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$, et construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

$U_5 = \{1=\omega_o,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$. On sait que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^4 = 0$.

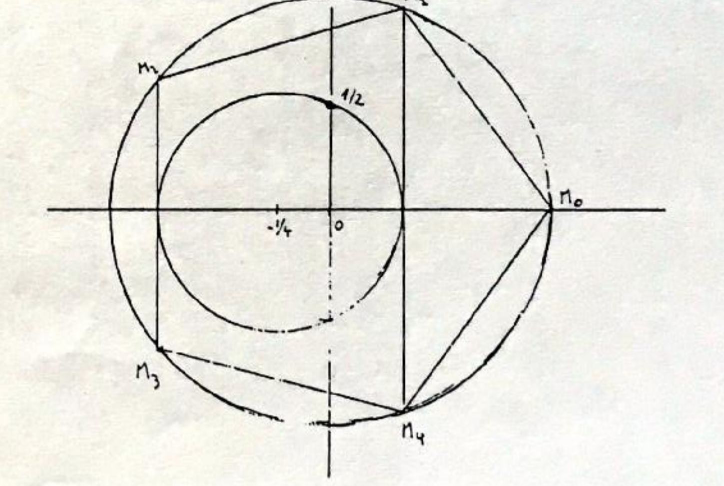
D'autre part : $1/\omega_1 = \omega_1^4$, $(1/\omega_1)^2 = \omega_1^3$. Donc :

$$1+(\omega_1+1/\omega_1) + (\omega_1^2+1/\omega_1^2) = 0. \text{ Or : } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}\right)$$

Soit $u = \cos \frac{2\pi}{5}$. On obtient l'équation : $1+2u+4u^2-2 = 0 = 4u^2+2u = 1$.

Puisque $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$, on trouve $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

On en déduit une construction à la règle et au compas du pentagone régulier : le cercle d'équation $4(x^2+y^2) + 2x-1 = 0$ a pour centre $(-1/4,0)$ et passe par $(0,1/2)$. On peut le construire à la règle et au compas. Il recoupe Ox en $\left(\cos \frac{2\pi}{5},0\right)$, d'où M_1, M_2 (intersection du cercle de centre M_1 et de rayon M_oM_1 avec le cercle de centre O et de rayon 1). M_3 et M_4 par symétrie.



N°19 — Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

Prérequis : . Définition du corps des complexes
. Conjugué

P = le plan

$\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ = repère orthonormé direct

I – Module d'un nombre complexe

1) Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ avec a, b réels

alors son conjugué est $\bar{z} = a - ib$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$, $z\bar{z}$ est un réel positif

déf : Le module de z est le réel positif : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

2) Propriétés

a) $|z| = 0 \iff z = 0$

b) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

c) $|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$ égalité ssi z est réel

$|\mathcal{I}m(z)| \leq |z|$ égalité ssi z est imaginaire pur

d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

e) si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

⇒ f) si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

g) Inégalité triangulaire

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

égalité à gauche ssi $z_1 = \lambda z_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^-$
égalité à droite ssi $z_1 = \lambda z_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ | à montrer

ou $z_2 = \lambda z_1$

XE

3) Interprétation géométrique

Soit $\vec{v}$ le vecteur image de z dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} = \overrightarrow{OM}$

alors $OM = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

$|z|$ est la norme du vecteur image de z

b, M, $\vec{v}$, $\vec{\jmath}$, O, $\vec{\imath}$, a

II - Argument d'un nombre complexe

1) Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib$, où a et b sont réels, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$

alors $\frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Soient $\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Il existe donc un réel θ, défini à $2k\pi$ près, tel que $\cos\theta = \alpha$ et $\sin\theta = \beta$.

déf : On appelle argument de z tout réel θ qui vérifie
$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|}$$
θ est défini à $2k\pi$ près. On note $Arg(z) = \theta\ [2\pi]$

Remarques ① si $z = 0$, on convient qu'il n'y a pas d'argument
② si $\theta \in]-\pi, \pi]$, on dit que θ est l'argument principal

2) Propriétés

a) $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ et $|z| = R \iff z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$

b) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
$\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

c) soient z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

→ d) $\arg(z^n) = n \arg(z)$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

⇒ f) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

3) Interprétation géométrique

$z' = \frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$, z' est l'affixe du point P

et $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{OP}})\ [2\pi]$

$\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{OM}})\ [2\pi]$ (car $\vec{OM}$ et $\vec{OP}$ sont colinéaires et de même sens)

$\arg(z) = \theta\ [2\pi]$, θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \vec{v}})$ où $\vec{v}$ est le vecteur image de z.

III - Lignes de niveau associées

1) Ligne de niveau de $z \longmapsto \left|\frac{z-b}{z-a}\right|$

$a \neq b$, $\lambda > 0$, $\Gamma_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{C}, z \neq a \;/\; \left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \lambda \right\}$

Soient $A(a)$, $B(b)$, $M(z)$

figure $z \in \Gamma_\lambda \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_\lambda = \left\{ M \in \mathcal{P}, M \neq A \;/\; \frac{MB}{MA} = \lambda \right\}$

$(1-\lambda^2)|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[(\lambda^2 a - b)\bar{z}\right] = \lambda^2|a|^2 - |b|$

1° cas si $\boxed{\lambda = 1}$, Γ_λ = médiatrice de $[AB]$ choisit l'origine en Ω par translat.

2° cas si $\boxed{\lambda \neq 1}$, Γ_λ = cercle de centre Ω = Bar $[(A, \lambda^2); (B, -1)]$ et de rayon $R = \lambda |\Omega A|$

$z' = z - \omega$
$a' = a - \omega$
$b' = b - \omega$
$|z'|^2 = \lambda^2 |a'|^2$.

2) Ligne de niveau de $z \longmapsto \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$

$a \neq b$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\Gamma_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C}, z \neq a \;\middle|\; \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \theta \; [2\pi] \right\}$

figure $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \arg(z-b) - \arg(z-a) = (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) - (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) = (\overrightarrow{MA}, \widehat{\overrightarrow{MB}})$

$z \in \Gamma_\theta \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P}, M \neq A, M \neq B \;\middle|\; (\overrightarrow{MA}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) = \theta \; [2\pi] \right\}$

1° cas $\boxed{\theta = 0 \; [2\pi]}$ alors $\mathcal{C}_\theta = AB \setminus [AB]$

2° cas $\boxed{\theta = \pi \; [2\pi]}$ alors $\mathcal{C}_\theta = [AB] \setminus \{A, B\}$

3° cas $\boxed{\theta \notin \pi\mathbb{Z}}$ alors $\mathcal{C}_\theta$ est un des 2 arcs $\widehat{AB}$ (privé des points A et B) du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tel que la tangente T en A à $\mathcal{C}$ vérifie $(T, \widehat{AB}) = \theta \; [\pi]$

IV - Applications

(1) Soient A et B les points d'affixes $a = -1$ et $b = 1$.
Déterminer $E = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; z' = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \in \mathbb{R}_*^- \right\}$

(2) Inégalité et égalité de Ptolemée.

$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$ $\qquad |b-a|\,|d-c| + |d-a|\,|c-b| = |d-b|\,|c-a|$.

ég $\Leftrightarrow$ A, B, C, D (sur un cercle) ou B A C D (alignés)

Egalité de Ptolémée :

Soient 4 points A, B, C, D du plan affine euclidien deux à deux distincts. Montrer que l'on a toujours :

~~$AC.BD \leqslant AC.BD + AD.BC$~~ $\cdot\ AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$

Et que l'on a l'égalité si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés (C et D étant de part et d'autre de la droite (AB) si A, B, C et D cocycliques, sinon C et D n'appartenant pas tous les deux au segment $[A,B]$, l'un d'entre eux appartenant au segment $[AB]$

Solutions : • par les complexes : soient a, b, c, d les affixes de A, B, C, D. On a alors $\underset{BD}{(d-b)}\underset{AC}{(c-a)} + \underset{DA}{(a-d)}\underset{BC}{(c-b)} = \underset{DC}{(d-c)}\underset{AB}{(b-a)}$

d'où avec les modules $DC.BA \leqslant AC.DB + AD.BC$.

Recherchons le cas d'égalité :

$DC.BA = AC.DB + AD.BC \Rightarrow |(d-c)(b-a)| = |(d-b)(c-a)| + |(a-d)(c-b)|$

$\Rightarrow$ les complexes $(d-b)(c-a)$ et $(a-d)(c-b)$ sont liés et même positivement liés $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ (d-b)(c-a) = \lambda (a-d)(c-b)$ car $(a-d)(c-b) \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{(d-b)(c-a)}{(a-d)(c-b)} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow A, B, C, D$ cocycliques ou alignés

si A, B, C, D cocycliques : $\dfrac{d-b}{a-d} = \lambda \dfrac{c-b}{c-a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \pi \ [2\pi]$ (à cause du $a-d$) $\Rightarrow$ D et C de part et d'autre de (AB)

si A, B, C, D alignés $\Rightarrow \dfrac{d-b}{d-a} = -\lambda \dfrac{c-b}{c-a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = -\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$

donc D et C appartiennent l'un au segment $[AB]$, l'autre pas.

1 Leçon 20 manque

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}\, \bar{z}z'$

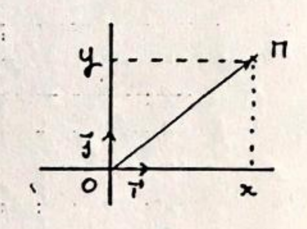
$\det(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Im}(\bar{z}z')$.

Représentation géométrique des nombres complexes ; interprétation géométrique des applications $z \to z+b$; $z \to az$ où $a, b \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$. Exemples d'applications à l'étude de configurations géométriques du plan

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. V l'espace vectoriel des vecteurs de ce plan muni de la base $(\vec{i},\vec{j})$.

I REPRESENTATION GEOMETRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Introduction :



Soit $M_0 \in P$ avec $M_0(x_0, y_0)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Donc $\vec{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

Soit l'application φ : $P \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad$ φ est une bijection de P sur $\mathbb{C}$

$M(x,y) \longmapsto x+iy$

Définition :
- Le nombre complexe $z = x+iy$ est appelé affixe du point $M(x,y)$, ou $M(x,y)$ est le point d'affixe z. Notation : $z = \text{affixe}(M)$.
- Soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur de V. Le nombre complexe $a+ib$ est dit affixe de $\vec{u}$. Notation $a+ib = \text{affixe}(\vec{u})$.

2) Propriétés :

① $\forall (M,M') \in P^2$ $\quad M = M' \iff \text{affixe}(M) = \text{affixe}(M')$ $\quad$ comme φ est bijective
$\forall (\vec{v},\vec{v}') \in V^2$ $\quad \vec{v} = \vec{v}' \iff \text{affixe}(\vec{v}) = \text{affixe}(\vec{v}')$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall (\vec{u},\vec{v}) \in V^2$ $\quad \text{affixe}(\vec{u}+\vec{v}) = \text{affixe}(\vec{u}) + \text{affixe}(\vec{v})$
$\text{affixe}(\lambda\vec{u}) = \lambda\,\text{affixe}(\vec{u})$.

3) Lien entre la représentation ponctuelle et la représentation géométrique.



Soit $A, B \in P$ $\quad \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

d'où $\quad \text{affixe}(\vec{AB}) = \text{affixe}(B) - \text{affixe}(A)$

II INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU MODULE ET DE L'ARGUMENT

1) Module d'un nombre complexe

Soit $M \in P$ $\quad M$ ayant pour affixe $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2+b^2} = |z| = OM$

$\forall (M,N) \in P^2$ $\quad M$ d'affixe z $\quad N$ d'affixe z' $\quad \vec{MN}$ a pour affixe $(z'-z)$

d'où $\quad \|\vec{MN}\| = |z'-z| = MN$.

Remarque : L'ensemble des points M dont l'affixe z a pour module 1 est le cercle de centre O et de rayon 1 car $OM = 1 \iff |z| = 1$.

2) Argument d'un nombre complexe :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ On pose $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Par définition $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$

Donc $\dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$. avec $(\vec{i},\vec{OM}) = \theta\ [2\pi]$

Propriétés : Soit $\vec{OM_1}$ d'affixe $z_1 \in \mathbb{C}^*$
$\vec{OM_2}$ d'affixe $z_2 \in \mathbb{C}^*$

$\mathrm{Arg}\, z_1 = \theta_1\ [2\pi]$ $\quad (\vec{OM_1},\vec{OM_2}) = (\vec{i},\vec{OM_2}) - (\vec{i},\vec{OM_1}) = (\theta_2 - \theta_1)\ [2\pi]$

$\mathrm{Arg}\, z_2 = \theta_2\ [2\pi]$ $\quad$ D'où $\quad (\vec{OM_1},\vec{OM_2}) = \arg\dfrac{z_2}{z_1}$

3) Conjugué d'un nombre complexe.

Soit $M \in P$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$\bar{z} = a-ib$. Alors si M' est le point d'affixe $\bar{z}$, M' est le symétrique de M par rapport à la droite des abscisses

$M(z)$

$\vec{j}$ O $\vec{i}$

$M'(\bar{z})$

III INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE $z \to z+b$ et $z \to az$ $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$

1) $z \to z+b$

Soit M, A, M' trois points du plan complexe P, d'affixes respectifs $z, b, z+b$
affixe $(\vec{MM'}) = (z+b) - z = b$ = affixe $(\vec{OA})$ Donc $\vec{MM'} = \vec{OA}$. Donc l'application f_b
f_b : $M \to M'$ est une translation de vecteur $\vec{OA}$ d'affixe $b \in \mathbb{C}$. d'où la proposition
$z \to z+b$

Proposition: Le point M' d'affixe $(z+b)$ est l'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur d'affixe b

A M' $\vec{j}$ M O $\vec{i}$

Réciproque

2) $z \to az$ $a \in \mathbb{C}^*$

Soit $M \in P$ d'affixe $z \neq 0$ g_a : $\begin{cases} P \to P \\ M \mapsto M' \\ z \mapsto az = z' \end{cases}$
$g_a(0) = 0$.

$OM' = |za|$ $OM = |z|$ Donc $\dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{|az|}{|z|} = |a|$

$(\widehat{\vec{OM}, \vec{OM'}}) = \arg \dfrac{z'}{z} = \arg a = \theta \ [2\pi]$ où $a = |a| e^{i\theta}$.

Donc g_a est la similitude de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}\, a = \theta \ [2\pi]$.
$g_a = S(O, \text{Arg}\, a, |a|)$

M' $\vec{j}$ θ M O $\vec{i}$

Cas particulier: . $|a| = 1$ alors $g_a = r(0, \text{Arg}\, a)$.
. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $g_a = h(0, |a|)$ pas de module
Faux. Plutôt $g_a = h(0, a)$
Réciproque.

IV APPLICATION:

①
Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. on considère :
- un quadrilatère convexe ABCD
- extérieurement, au quadrilatère, le point M_1 (resp M_2, M_3, M_4) tel que le triangle AM_1B (resp BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommets M_1 (resp M_2, M_3, M_4)

Soit a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D et z_1, z_2, z_3, z_4 les affixes de M_1, M_2, M_3, M_4
Montrer que $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et ont mêmes longueurs.

② en chercher une autre dans un manuel de TC

Leçon n°: 23 Emploi du calcul vectoriel pour l'étude des droites et des plans de l'espace (génération, parallélisme, points alignés, points coplanaires ...)

---

but supposés connus : barycentre, déterminant, produit scalaire, produit vectoriel, droites vectorielles, plans vectoriels, directions

On se place dans $\mathcal{E}$ espace affine (de dim 3), $\vec{E}$ espace vectoriel attaché à $\mathcal{E}$.

I Droites de $\mathcal{E}$

1. Définition d'une droite (AB) de $\mathcal{E}$

a) Définition | Soient A et B, deux points distincts de $\mathcal{E}$, on appelle droite (AB) $\{M \mid \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{AM} = k\vec{AB}\}$

Remarques.
- $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)
- (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.
- soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (AB), (AB) est notée $=$ $\mathcal{D}(A,\vec{u})$.
- si $k \in [0,1]$ $\{M \mid \vec{AM} = k\vec{AB}\}$ = segment [AB]
  si $k \geq 0$ $\{M \mid \vec{AM} = k\vec{AB}\}$ = ½ droite issue de A contenant

b) Proposition | $\mathcal{D}(A,\vec{u}) = \mathcal{D}(B,\vec{v}) \iff (\vec{u},\vec{v})$ lié et $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{AB} = \lambda\vec{u}$

Dem. $\Rightarrow$ $\mathcal{D}(A,\vec{u}) = \mathcal{D}(B,\vec{v}) \Rightarrow (B \in \mathcal{D}(A,\vec{u}) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{AB} = \lambda\vec{u})$
$\Rightarrow (A \in \mathcal{D}(B,\vec{v}) \iff \exists\mu \in \mathbb{R} \mid \vec{AB} = \mu\vec{v})$

donc $\mathcal{D}(A,\vec{u}) = \mathcal{D}(B,\vec{v}) \Rightarrow (\lambda\vec{u} = \mu\vec{v}$ et $\vec{AB} = \lambda\vec{u})$
$\Updownarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ lié et $\exists\lambda \mid \vec{AB} = \lambda\vec{u}$

$\Leftarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ lié, $\vec{AB} = \lambda\vec{u}$ $\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} = \mu\vec{v}$ et $\vec{AB} = \lambda\vec{u} = \lambda\mu\vec{v}$
$M \in \mathcal{D}(A,\vec{u}) \iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{AM} = k\vec{u}$

$\iff \vec{AB} + \vec{BM} = k\vec{v}$
$\iff \vec{BM} = k\mu\vec{v} - \vec{AB} = \vec{v}(k\mu - \lambda\mu)$
$\Rightarrow M \in \mathcal{D}(B,\vec{v})$
$\mathcal{D}(A,\vec{u}) \subset \mathcal{D}(B,\vec{v})$
de même on montrerait $\mathcal{D}(B,\vec{v}) \subset \mathcal{D}(A,\vec{u})$

2. Points alignés

trop restrictif !!

a) définition | A, B, C trois points ≠ de $\mathcal{E}$ sont alignés $\iff C \in (AB)$

Rque : montrons que $C \in (AB) \iff B \in (AC) \iff A \in (BC)$

$C \in (AB)$, $C \neq A$, $C \neq B$ $\iff \exists k \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\} \mid \vec{AC} = k\vec{AB}$
$\vec{AB} + \vec{BC} = k\vec{AB}$
$\vec{BC} = (k-1)\vec{AB}$
$\iff \exists k' \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\} \mid \vec{BA} = k'\vec{BC}$
$\iff A \in (BC)$ $A \neq B$ $A \neq C$

feuille oubliée entre p34 et 35

p. 34

dans l'espace affine euclidien orienté

b. proposition : (A, B, C) alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

(A, B, C) alignés $\Leftrightarrow$ $C \in (AB)$ $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ / $\vec{AC} = k\vec{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ colin. $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

fait à l'esbrouffe ! Et si A=B

→ 3. de p35

II Plans de $\mathcal{E}$

1 a) définition | Soient A, B, C 3 points distincts non alignés de $\mathcal{E}$ on appelle plan $(ABC) = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists (k, k') \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{AM} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}\}$

remarques
- (ABC) = ensemble des barycentres de A, B et C
- $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AC}$ (ABC) est également noté $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$
- si $k \geq 0$ $\{M \in \mathcal{E} \mid k' \in \mathbb{R}^2$ $\vec{AM} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}\}$ est le demi plan délimité par (AC) contenant B.

2. propositions

espace affine euclidien

prop b). | Soit A donné, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $E = \{M \mid \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0\}$ est un plan

dém . $A \in E$. $\vec{u}^\perp$ est de dimension 2
soit $(\vec{v}, \vec{w})$ une base de $\vec{u}^\perp$
$\mathcal{P}(A, \vec{v}, \vec{w}) = \{M \mid \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0\} = E$

prop c). | $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ donné . $O \in \mathcal{E}$ donné, espace affine euclidien orienté
$D = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{OM} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})\}$ est la droite $\perp$ à $\mathcal{P}$ passant par O.

dém : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$ donc $\vec{w} \perp \mathcal{P}$
$D = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{OM} = \lambda \vec{w}\}$ = droite de direction $\vec{w}$ passant par O.

prop a). | $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}'(A', \vec{u}', \vec{v}')$ $\Leftrightarrow$ $\exists (a, b, c, d, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^6 / ad - bc \neq 0$
$\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v}$
$\vec{v}' = c\vec{u} + d\vec{v}$
$\vec{AA'} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

$\Leftarrow$. $M \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu)$ $\vec{A'M} = \lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}'$
$\Leftrightarrow$ $\vec{AM} = \lambda\vec{u}' + \mu\vec{v}' + \vec{AA'} = \lambda a\vec{u} + \lambda b\vec{v} + \mu c\vec{u} + \mu d\vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
$= k\vec{u} + k'\vec{v}$.
$\Rightarrow$ $M \in \mathcal{P}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$

$\begin{cases}\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v} \\ \vec{v}' = c\vec{u} + d\vec{v}\end{cases}$ $ad - bc \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists A, B, C, D \in \mathbb{R}^4$ / $\begin{cases}\vec{u} = A\vec{u}' + B\vec{v}' \\ \vec{v} = C\vec{u}' + D\vec{v}'\end{cases}$
on montre de même que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}'(A', \vec{u}', \vec{v}')$ $\Rightarrow$ $A' \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ donc (α, β) / $\vec{AA'} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
$\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ appartiennent à $\vec{P}' = \vec{P}$ donc
$\exists (a, b, c, d)$ / $\begin{cases}\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v} \\ \vec{v}' = c\vec{u} + d\vec{v}\end{cases}$
la décomposition étant unique ds une base
on a $ad - cb \neq 0$.

→ p35, le III

3°. Points coplanaires

a. définition | A, B, C, D 4 points distincts 2 à 2 sont coplanaires $\iff$ $D \in \mathcal{P}(A,B,C)$ ou ABC alignés.

remarques. $D \in \mathcal{P}(A,B,C) \iff A \in \mathcal{P}(B,C,D) \iff B \in \mathcal{P}(A,C,D) \iff C \in \mathcal{P}(A,\ldots)$

en effet $D \in \mathcal{P}(A,B,C)$ (4 pts distincts) $\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

$\iff \vec{AB} = \frac{1}{\lambda}\vec{AD} - \frac{1}{\mu}\vec{AC} = \lambda'\vec{AD} + \mu'\vec{A\ldots}$

$\iff B \in \mathcal{P}(A,D,C)$

ABC alignés (distincts) définissent une droite donc $\forall D \in \mathcal{E}$ $\mathcal{P}(A,B,D)$ contient (AB) donc C

donc $C \in \mathcal{P}(A,B,D)$ $\forall D \in \mathcal{E}$

b. proposition (A,B,C,D) coplanaires $\iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$

b'. proposition (A,B,C,D) coplanaires (de l'espace affine euclidien orienté) $\iff \vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$ est orthogonal au plan (A,C,D) de direction $\vec{P}$ si A, C, D non alignés

(ABCD copl) $\Rightarrow B \in (A,C,D) \Rightarrow \vec{AB} \in \vec{P}$

$\vec{AC} \wedge \vec{AD} \in \vec{P}^{\perp}$ $\vec{AB} \in \vec{P}$ donc $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) = 0$

$\Leftarrow$ $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) = 0 \iff \vec{AB}$ orthogonal à $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$
or $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$ orthogonal à $\vec{AC}$ et à $\vec{A\ldots}$

$\vec{AC} \wedge \vec{AD} \perp \vec{AD}$
$\vec{AC} \wedge \vec{AD} \perp \vec{AC}$
$\vec{AC} \wedge \vec{AB} \perp \vec{AB}$

donc $(\vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AB})$ forment un syst lié
donc (ABCD) coplanaires → p34bis

III Positions relatives de droites et de plans

1. Cas de deux droites parallèles.

| Définition : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \iff (\mathcal{D} = \mathcal{D}')$ ou ($\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coplanaires)

| Théorème $\mathcal{D}(A,\vec{u}) \parallel \mathcal{D}'(A',\vec{u}') \iff \vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires.

dem . $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \iff \vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires
ou $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$ $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \iff \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coplanaires
on se ramène au //isme ds le plan
$\iff (\vec{u}, \vec{v})$ lié

Propriétés . transitivité du //isme. (relation d'équivalence)
. il existe une unique droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.

2. Cas de deux droites non parallèles.

Théorème | soient $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}'(B,\vec{v})$ deux droites non parallèles ($\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires)

. $\vec{AB} \in \vec{P}(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est réduit à un point
. $\vec{AB} \notin \vec{P}(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$

dém. Soit $\vec{w} \in \vec{E}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base de $\vec{E}$.

$$\vec{AB} = x_0 \vec{u} + y_0 \vec{v} + z_0 \vec{w}$$

$\forall M \in D'$, $\exists k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{BM} = k\vec{v}$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = x_0 \vec{u} + (y_0 + k)\vec{v} + z_0 \vec{w}.$$

$M \in D \cap D' \Rightarrow M \in D \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \begin{matrix} y_0 + k = 0 \\ z_0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{AB} = x_0 \vec{u} + y_0 \vec{v} \in P(\vec{u}, \vec{v})$

donc $D \cap D' \neq \emptyset \Rightarrow \vec{AB} \in P(\vec{u}, \vec{v})$

donc $\vec{AB} \notin P(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow D \cap D' = \emptyset$

$D = \{ M \,/\, \vec{AM} = x\vec{u} \}$

$D' = \{ N \,/\, \vec{BN} = y\vec{v} \}$

$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

$\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

et on est ramené à 1 Pb plan.

donc $M \in D \cap D'$

$D \cap D'$ est une v. l.a de direction $U \cap U'$. d'où $U \cap U' = 0 \Rightarrow D \cap D' = \{\}$

3. Droite et Plan parallèles

a. définition $D \,/\!/\, P \Leftrightarrow D \,/\!/$ à une droite de P

Remarque 1) $D \,/\!/\, P$ et $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ $D \,/\!/\, \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists\, \Delta(B, \vec{u}) \subset P \,/\, \Delta(B, \vec{u}) \,/\!/\, D(A, \vec{u})$ $\Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{P}$

2) $D \,/\!/\, P \Rightarrow D \cap P = \emptyset$ ou $D \subset P$

b. propriété $\mathcal{D} \,/\!/\, \mathcal{D}'$ $\mathcal{D} \,/\!/\, \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{D}' \,/\!/\, \mathcal{P}$

dem. $\mathcal{P}$ contient une droite $\Delta \,/\!/\, D$ donc $\Delta \,/\!/\, D'$ donc $\mathcal{P} \,/\!/\, \mathcal{D}'$

4. Droite et Plan sécants (non parallèles)

Proposition | $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est réduit à 1 point.

dem. $\vec{u}$ base de $\vec{\mathcal{D}}$ $(\vec{v}, \vec{w})$ base de $\vec{P}$ $\vec{u} \notin \vec{P}$ donc $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$

donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est au plus réduit à un point,

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base de E, $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ $\mathcal{P} = (B, \vec{v}, \vec{w})$

$\forall M \in \mathcal{E}\ \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

$\exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{AB} = x_0 \vec{u} + y_0 \vec{v} + z_0 \vec{w}$

soit $N \in \mathcal{D} \,/\, \vec{AN} = x_0 \vec{u}$; $\vec{AB} = \vec{AN} + \vec{NB}$

$= x_0 \vec{u} + \vec{NB} = x_0 \vec{u} + y_0 \vec{v} + z_0 \vec{w}$

$\Rightarrow \vec{NB} = y_0 \vec{v} + z_0 \vec{w} \Rightarrow N \in \mathcal{P}$

donc $N \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$

donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{N\}$

Théorème position relative d'une droite et d'un plan : soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan de l'espace affine alors :
$$\begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \\ \text{ou} \\ \mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset \\ \text{ou} \\ \mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{1pt\} \end{cases}$$

5. Droite et plan orthogonaux.

définition | $\mathcal{D}(A,\vec{u}) \perp \mathcal{P}(B,\vec{v},\vec{w}) \iff \mathcal{D}$ orthogonale à toute droite de

théorème | $\mathcal{D}(A,\vec{u}) \perp \mathcal{P}(B,\vec{v},\vec{w}) \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$

dem $\Rightarrow$ $\mathcal{D}'(B,\vec{v})$ et $\mathcal{D}''(B,\vec{w})$ droite de $\mathcal{P}$
d'après la définition $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}''$ donc
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$

$\Leftarrow$ $(\vec{v},\vec{w})$ syst. générateur de $\vec{\mathcal{P}}$. Toute droite de $\mathcal{P}$ est de la forme $\mathcal{D}(M, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w})$ donc par linéarité du produit scalaire, $\mathcal{D} \perp$ à tte dte de $\mathcal{P}$.

conséquence $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ $\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{D} \perp \mathcal{P}'$

6. Plans parallèles

a. définition : $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff \mathcal{P} = \mathcal{P}'$ ou $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$

b. théorème | $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \parallel \mathcal{P}'(A',\vec{u}',\vec{v}') \iff (\vec{u},\vec{v})$ générateur de $\vec{\mathcal{P}}'$

dem. $\Rightarrow$ $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ générateur de $\mathcal{P}'$
$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset \Rightarrow$ toute droite de $\mathcal{P}$ a une intersection vide avec $\mathcal{P}' \Rightarrow D(A,\vec{u}) \cap \mathcal{P}' = \emptyset \Rightarrow \mathcal{D}(A,\vec{u}) \parallel \mathcal{P}'$
donc il existe une droite de $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ donc
$\mathcal{D}(A',\vec{u}) \subset \mathcal{P}'$ de même $\mathcal{D}(A',\vec{v}) \subset \mathcal{P}'$
donc $\mathcal{P}' = (A',\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},\vec{v})$ générateur de $\vec{\mathcal{P}}'$

$\Leftarrow$ $(\vec{u},\vec{v})$ générateur de $\vec{\mathcal{P}}' \Rightarrow \mathcal{P}' = \mathcal{P}(A',\vec{u},\vec{v})$
$A' \in \mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}'$
$A' \notin \mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$
en effet $\vec{AA'} = x_0\vec{u} + y_0\vec{v} + z_0\vec{w}$ avec $z_0 \neq 0$
$M \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \Rightarrow \vec{A'M} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ avec $\gamma \neq 0$
$\Rightarrow M \notin \mathcal{P}' \Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$

Conséquences $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sécants $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$ sécants.
$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sécants $\Rightarrow$ $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{P}$ sécants

7. Plans sécants

Théorème | $\mathcal{P} \not\parallel \mathcal{P}' \Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' =$ une droite.

Dem

lemme | 2 droites strictement parallèles déterminent un plan.

dem lemme. $\forall (A,B) \in D_1 \times D_1$
$\forall (C,D) \in D_2 \times D_2$

(A,B,C,D) coplanaires car $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ de même nature que $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{CD})$ lié car $(\vec{AB},\vec{CD})$ lié.

dem. th. Soient $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}'$ $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{P}$.
$\mathcal{D}_2 \parallel \mathcal{D}_1$ $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}'$; $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ déterminent $\mathcal{P}'$ $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{P} = I_1$
$\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{P} = I_2$

$\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ $\mathcal{P}' = (\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$

$\Rightarrow (i_1, i_2) \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

supposons $i \notin (i_1 i_2)$ et $i \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$

$\rightarrow (i, \vec{ii_1}, \vec{ii_2})$ plan $\subset \mathcal{P} = \mathcal{P}$, $\subset \mathcal{P}' = \mathcal{P}'$ $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}'$ contraire à l'hypothèse

<u>Théorème</u>

Soient $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ 2 plans affines de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \begin{cases} \mathcal{P} & \text{si } \mathcal{P} = \mathcal{P}' \\ \emptyset & \text{si } \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \text{ et } \mathcal{P} \neq \mathcal{P}' \\ \text{une droite affine } \mathcal{D}. & \end{cases}$$

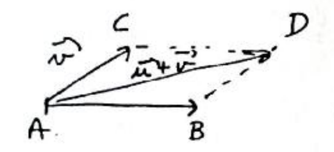
(27) Interprétation du calcul vectoriel dans le langage des configurations (parallélogramme, configuration de Thalès, ...) et dans celui des transformations.

notation : plan affine $\mathcal{E}$, $\vec{E}$ espace vectoriel associé.

I Addition des vecteurs, parallélogramme, translations.

1) Addition de vecteurs.

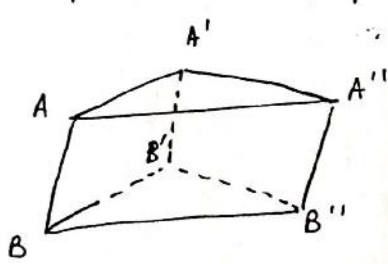
① soit $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ $\quad \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v} \iff ABDC$ #



$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

② configuration des trois # :

$\vec{u} + \vec{v}$ est indépendant des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



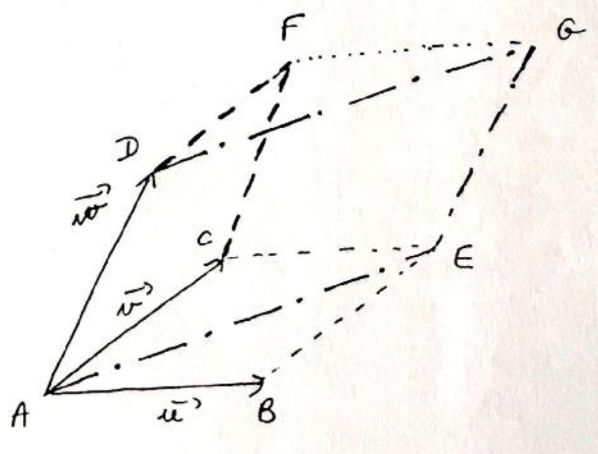
$\left.\begin{array}{l} A\,A'BB' \text{ \#} \\ A'A''B'B'' \text{ \#} \end{array}\right\} \Rightarrow A\,A''B''B$ #

$\vec{u} = \vec{AA'} = \vec{BB'}$

$\vec{v} = \vec{A'A''} = \vec{B'B''}$

alors $\vec{AA''} = \vec{BB''} = \vec{u} + \vec{v}$.

③ Associativité de la somme



$\vec{AB} = \vec{u}$

$\vec{AC} = \vec{v}$

$\vec{AD} = \vec{w}$

$\vec{AE} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{AF} = \vec{v} + \vec{w}$

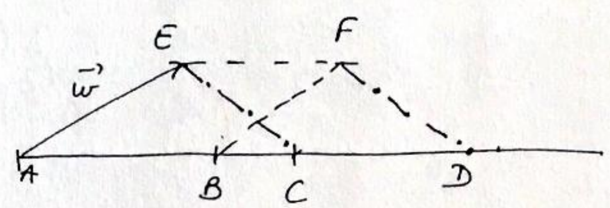
$\vec{AG} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ se traduit par :

$\left.\begin{array}{l} ACEB \text{ \# } (\vec{u}+\vec{v}) \\ A\,E\,G\,D \text{ \# } (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} \\ A\,C\,F\,D \text{ \# } (\vec{v}+\vec{w}) \end{array}\right\} \Rightarrow A\,F\,G\,B$ #

④ Construction de $\vec{u}+\vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés :

$\vec{AB} = \vec{u}$
$\vec{AC} = \vec{v}$
$\vec{AE} = \vec{w}$



$\vec{AD} = \vec{u}+\vec{v}$ s'exprime par : AEFB # et EFDC #

2) Translations

① définition

② composée de deux translations $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

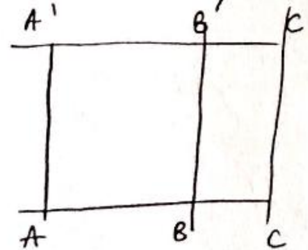
③ Proposition : l'ensemble des translations muni de la composition est un groupe commutatif.

II Multiplication par un scalaire, configuration de Thalès, homothéties.

① définition :

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{u}$ est tel que si $\vec{AB} = \vec{u}$ alors $\vec{AC} = \lambda\vec{u}$ est tel que A, B, C alignés et $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$.

remarque cette définition est indépendante du représentant choisi (c'est le théorème de Thalès dans le cas particulier de 2 droites parallèles)



$\vec{AB} = \vec{u}$ $\vec{AC} = \lambda\vec{u}$
$\vec{A'B'} = \vec{u}$ $\vec{A'C'} = \lambda\vec{u}$

alors $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$.

② propriétés

$\vec{AC} = \vec{v}$ $\vec{AB} = \vec{u}$
$\vec{AD} = \vec{u}+\vec{v}$

a) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

Pour démontrer ce résultat en seconde on utilise le théorème de Thalès :

$\vec{AC} = \vec{v}$ $\quad \vec{AB} = \vec{u}$

$\vec{AC'} = \lambda \vec{v}$ $\quad \vec{AB'} = \lambda \vec{u}$ $\quad \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v}$

alors la parallèle à (CD) menée par C' coupe (AD) en D' avec

$\overline{AD'} = \lambda \overline{AD} \Rightarrow \vec{AD'} = \lambda \vec{AD} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$

et on a alors (B'D') parallèle à (BD) car $\overline{AD'} = \lambda \overline{AD}$
$\overline{AB'} = \lambda \overline{AB}$

donc A'C'D'B' est un parallélogramme ((B'D') // (BD) // (AC)
(C'D') // (CD) // (AB))

et $\vec{AD'} = \vec{AC'} + \vec{AB'}$ donc $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.

b) $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda \mu)\vec{u} = \mu(\lambda \vec{u})$ $\quad *$

ceci provient de la définition de $\lambda \vec{u}$:

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\quad \lambda \vec{u} = \vec{AC}$ avec A, B, C alignés et $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$

donc l'égalité * ne traduit que des propriétés des réels.

d) $1 . \vec{u} = \vec{u}$

e) $0 \vec{u} = \vec{0}$.

f) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$

③ homothéties :

a) définition d'une homothétie (rapport ≠ 0, 1)

b) composée de deux homothéties de même centre

c) <u>Proposition</u> l'ensemble des homothéties de centre O et l'identité muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

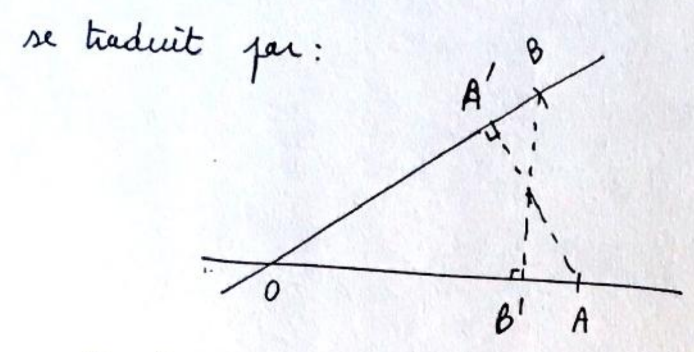
III On peut éventuellement donner une interprétation de $\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$ grâce à l'égalité des rapports de projection :

$\lambda \vec{u} . \vec{v} = \lambda(\vec{u} . \vec{v})$ (Thalès)
$= \vec{u} . (\lambda \vec{v})$ (évident)

$\vec{OA} = \vec{v}$
$\vec{OB} = \vec{u}$

puis remarquer que $\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$ pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de longueur 1

se traduit par :



$\overline{OA} . \overline{OB'} = \overline{OA'} . \overline{OB}$

ou tout simplement par le fait que les triangles OBB' et OAA' sont égaux (deux triangles rectangles qui ont un angle commun et un côté égal).

Remarques:

Cette leçon est faite pour que vous compreniez les "bases" de l'enseignement de la géométrie du secondaire :

- par 1 pt on peut mener une parallèle et une seule à une droite donnée
- on dispose du théorème de Thalès.

qu'il faut comparer à une autre introduction à la géométrie : définition d'un espace affine vue en préparation à l'écrit.

(32) Réflexion du plan échangeant deux points donnés, médiatrice, régionnement associé. Application au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit ...)

$\mathcal{P}$ plan affine euclidien

supposé connu : réflexion

I Réflexion du plan échangeant deux points donnés - Médiatrice - Régionnement associé

Th et déf : soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. Il existe une unique réflexion échangeant ces deux points. L'axe Δ de cette réflexion est la perpendiculaire à [AB] passant par le milieu de [AB]. On appelle médiatrice de [AB] cette droite.

dém : si il existe une réflexion s qui échange A et B alors $s(A)=B$ $s(B)=A$ donc $s(I)=I$ si I milieu de [AB] (s affine). Soit Δ la perpendiculaire à (AB) passant par I, alors nécessairement s est d'axe Δ. La réflexion d'axe Δ convient.

Prop : $\forall M \in \Delta \quad AM = MB$.

dem $s(M)=M \quad s(A)=B \Rightarrow s(A)s(M) = BM = AM$ $\quad s$ isométrie

Prop Δ sépare le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ fermés caractérisés par

$\mathcal{P}_A = \{M,\ MA \leq MB\}$

$\mathcal{P}_B = \{M,\ MA \geq MB\}$

dem $M \in \mathcal{P}_B \Rightarrow (MA) \cap \Delta = Q \quad QA = QB \quad MA = AQ + QB \geq MB$

$M \in \mathcal{P}_A \Rightarrow MA \leq MB$

Prop $M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB$

dem $M \in \Delta \Rightarrow MA = MB$ vu

$MA = MB \Rightarrow M \in \mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B = \Delta$

application : distance d'1 pt M extérieur à 1 cercle à ce cercle $\mathcal{C}$

$P = [ON] \cap \mathcal{C}$ $\quad$ si $N \in \mathcal{C}$ et Δ médiatrice de [PN] alors $M \in \mathcal{P}_P \Rightarrow MN \geq MP$

donc $d(M, \mathcal{C}) = \inf\{NM, N \in \mathcal{C}\} = PM$.

II Applications.

1) Les médiatrices d'un triangle sont concourantes au centre du cercle circonscrit. (à faire)

2) Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

dém on mène par A la // à (BC), par B la // à (AC), par C la // à (BA) on obtient un nouveau triangle (A'B'C') dont les médiatrices sont les hauteurs du tr (ABC)

faire figure _ démonstration.

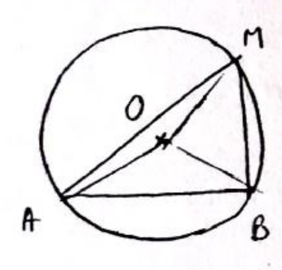
3) triangle isocèle – angle inscrit.

on se place dans un plan orienté. Un triangle (ABC) est dit isocèle en A si AB = AC. Soit I le milieu de [BC]

$$AB = AC \iff (AI) \perp (BC) \iff (\vec{BA}, \vec{BC}) = -(\vec{CA}, \vec{CB}) \quad [2\pi]$$

car la réflexion d'axe (AI) envoie B sur C

Théorème soit M, A, B trois points cocycliques sur un cercle de centre O

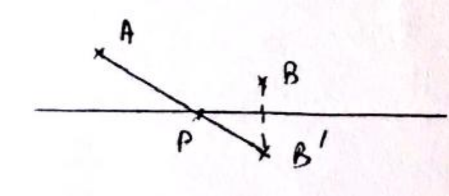


alors $2(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) \quad [2\pi]$

dém on utilise les deux triangles isocèles (AOM) et (BOM) et les égalités d'angles obtenues avec les réflexions d'axes les médiatrices de [AM] et [BM]

Réciproque: soient M, A, B trois points non alignés et O appartenant à la médiatrice de [AB]. Alors l'égalité $2(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) \; [2\pi]$ entraîne que le cercle de centre O, passant par A contient M.

4) Trajectoire de lumière :



soient Δ une droite et A et B deux points appartenant au même demi-plan ouvert limité par Δ. Déterminer, s'il existe, le minimum de MA + MB lorsque M parcourt D

idée: considérer B' le symétrique de B par rapport à Δ et $P = (AB') \cap \Delta$

$\forall M \in D \quad AM + MB = AM + MB' \geq AB' = AP + PB' = AP + PB.$

(33)

Réflexions du plan échangeant deux droites concourantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle · ·nscrit...).

On se place dans le plan affine euclidien orienté.
On suppose connues les notions suivantes:

- réflexions
- angles (égalité d'angles modulo 2π)

Introduction: Soient deux droites D_1 et D_2 distinctes: on cherche toutes les réflexions qui échangent ces deux droites.

I) Bissectrices de demi-droites et de droites

1°)Recherche des points invariants.

Proposition: *Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes. S'il existe une réflexion s d'axe Δ qui transforme D_1 en D_2 et D_2 en D_1, alors soit Δ, D_1 et D_2 sont parallèles, soit elles sont concourantes.*

Dém.:
On remarque d'abord que tout point de Δ est invariant par la réflexion.
a) Si D_1 et D_2 sont parallèles alors nécessairement Δ n'est sécante ni avec l'une ni avec l'autre: sinon le point d'intersection de D_1 avec Δ, A, serait invariant par la réflexion et donc D_1 couperait D_2 en A (en effet $s(D_1) = D_2$ donc $s(A) \in D_2$). Et ceci contredit l'hypothèse 'D_1 parallèle à D_2'.
b)Si $D_1 \cap D_2 = \{A\}$ alors Δ n'est parallèle ni à l'une ni à l'autre: si l'axe est parallèle à D_1 (resp. D_2) alors $s(D_1)$ est parallèle à D_1 (resp. $s(D_2)$ est parallèle à D_2); c'est à dire D_2 est parallèle à D_1 (resp. D_1 est parallèle à D_2), ce qui contredit l'hypothèse 'D_1 et D_2 sont sécantes'.
Soit alors B le point d'intersection de Δ avec D_1: $s(B)=B$ et donc $B \in D_2$, d'où enfin B=A et les trois droites sont concourantes.

2°)Définition des bissectrices.

Proposition/définition: *Il existe une unique réflexion, s, qui échange deux demi-droites [Ox) et [Oy) données, d'origine commune O.*
L'axe de cette réflexion, Δ, est appelé bissectrice de [Ox) et [Oy).

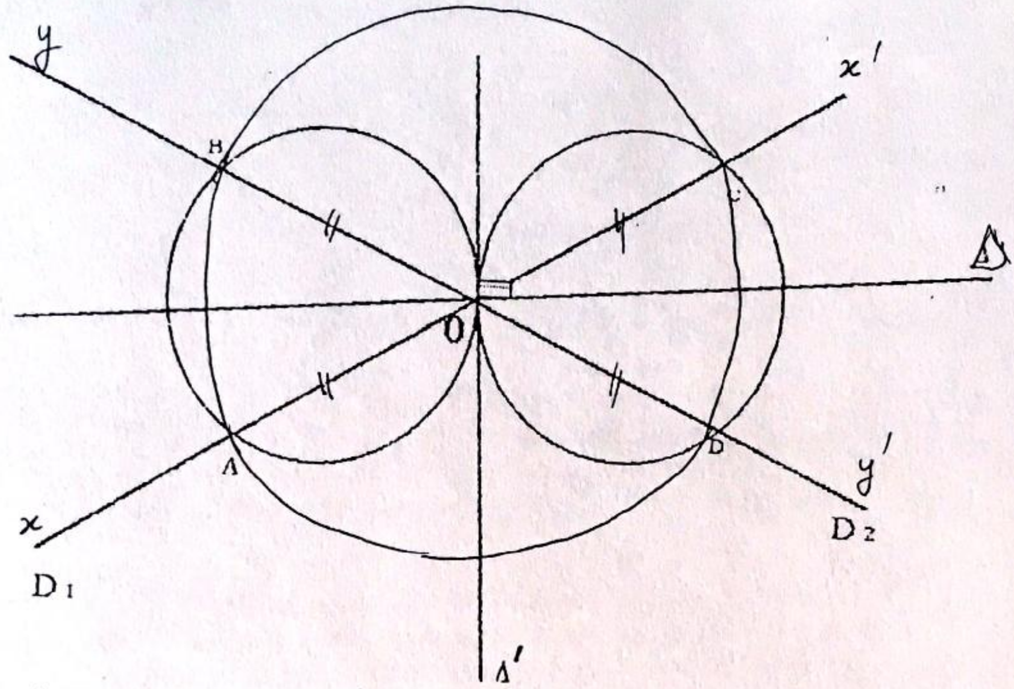
Dém.:
a) Si [Ox) = [Oy) alors Δ est la droite contenant [Ox).
b) Si [Ox)≠[Oy) alors la proposition du premier paragraphe donne que, si s existe, Δ, son axe, passe par O. Soit $A \in$[Ox) et soit $B \in$[Oy) et tels que OA=OB; on a s(O)=O et donc OA=Os(A). Et puisque $s(A) \in$[Oy), s(A)=B: Δ est la médiatrice de [AB].(cf. unicité de la médiatrice.)
Montrons que la réflexion d'axe la médiatrice de [AB] échange [Ox) et [Oy): s(O)=O et s(A)=B donc s([Ox))=s([Oy)).

Proposition/définition: *Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes* sécantes en O; alors il existe exactement deux réflexions s et s', qui échangent D_1 et D_2
Leurs axes, Δ et Δ', sont appelés bissectrices de D_1 et D_2.
De plus on a $\Delta \perp \Delta'$ et $s \circ s' = s' \circ s = s_o$, où s_o est la symétrie centrale de centre O.

Soit $A \in D_1$ et soient B et D deux points distincts de D_2 tels que OA=OB=OD. D'après la proposition qui précède il existe une unique réflexion qui échange [OA) et [OB) d'une part, et il existe une unique réflexion qui échange [OA) et [OD) d'autre part. On note s et s' (resp.) ces deux réflexions.

Ainsi s et s' échangent D_1 et D_2. Montrons que ce sont les seules réflexions qui le font:
Il suffit pour cela de constater que s envoie A sur un point M de D_2 tel que OM=OA: M est donc soit B soit D. C'est s qui envoie A sur B et s' qui envoie A sur D.

On a s(O)=s'(O)=O, s(B)=A et s'(D)=A.
Donc s(D)≠A (car D≠B), $s(D) \in D_1$ et de plus Os(D)=OD=OA: s(D) est le symétrique de A par rapport à O (on le note C). De même on trouve s'(B)=C.
Donc $s \circ s'(B)= s' \circ s(B)=D= s_o(B)$, $s' \circ s(A)= s \circ s'(A)= s_o(A)$ et enfin $s \circ s'(O)= s' \circ s(O)=O =s_o(O)$ donc (voir le théorème en annexe) $s \circ s' = s' \circ s = s_o$. Mais deux réflexions commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux donc $\Delta \perp \Delta'$. (en effet si $\vec{i} \in \vec{\Delta}$, $\vec{j} \in \vec{\Delta'}$, $s' \circ s = s \circ s' \iff$
$2(\vec{i},\vec{j}) = 2(\vec{j},\vec{i})\ [2\pi] \iff 4(\vec{i},\vec{j}) = 0\ [2\pi]$)



Exemple: Dans le triangle ABC, la bissectrice des demi-droites [AB) et [AC) est dite 'bissectrice intérieure'; l'autre bissectrice des droites (AB) et (AC) est appelée bissectrice extérieure.

3°)Propriété métrique.

Proposition: *L'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes D_1 et D_2 est la réunion de leurs bissectrices.*

dém.:

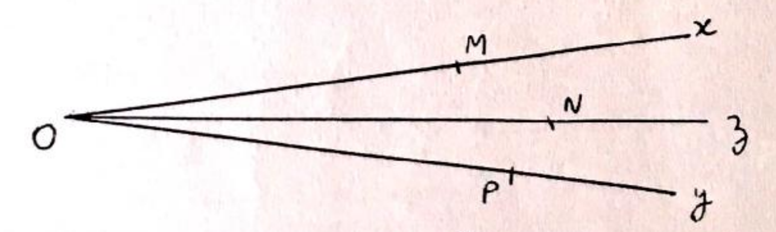
Soit Δ une bissectrice de D_1 et D_2, et M un point de Δ; soit s la réflexion d'axe Δ. On a d'après ce qui précède: $d(M,D_1)=d(s(M),s(D_1))=d(M,D_2)$. Donc tout point de la bissectrice est équidistant de D_1 et D_2.

Réciproquement: soit M un point équidistant de D_1 et D_2 et soient H et H' ses projetés orthogonaux sur D_1 et D_2. Alors M est sur la médiatrice de [HH'] ainsi que O (Pythagore): c'est à dire M appartient à l'une des bissectrices de D_1 et D_2.

4°)Propriété angulaire.

Proposition: *Soit [Ox) et [Oy) deux demi-droites de même origine; soit de plus [Oz) la demi-droite portée par la bissectrice de [Ox) et [Oy), telle que pour tout couple de points $(M,N)\in[Ox)\times[Oy)$, [MN] rencontre [Oz).*
On a alors: angle([Ox),[Oz])= angle([Oz),[Oy])= 1/2 angle([Ox),[Oy]).

Dém.:



C'est immédiat d'après les propriétés des réflexions: on note M un point de [Ox) et P son image par la réflexion d'axe la bissectrice de [Ox) et [Oy). Alors P est un point de [Oy) et on a l'égalité d'angles de vecteurs: angle $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$=angle $(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP})$ pour tout point N de la bissectrice.

II)Applications

1°)Centre du cercle inscrit dans un triangle.

Proposition: *Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point I. Ce point est le centre du cercle inscrit du triangle.*

Dém:
a) Deux bissectrices intérieures d'un triangle se coupent à l'intérieur du triangle: soit ABC un triangle et A' (resp. B', C') le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de A (resp. B, C) avec [BC] (resp. [AC], [AB]). Alors A et A' sont de part et d'autre de (BB'); donc le point d'intersection des deux bissectrices (AA') et (BB') appartient à [AA']: il est intérieur au triangle.
b) Soit I ce point d'intersection. Puisque I est un point des bissectrices intérieures issues de A et de B, I est équidistant des droites (AC) et (AB) d'une part et (AB) et (BC) d'autre part: il est ainsi équidistant de (AC) et de (BC), donc il appartient à l'une des bissectrices de ces droites. Mais comme I est intérieur au triangle il appartient à la bissectrice intérieure. Les bissectrices intérieures sont donc concourantes en I.
Il est immédiat que I est le centre du cercle inscrit de ABC.

2°)Centres des cercles exinscrits.

Proposition: *Dans un triangle, deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure, chacune contenant un sommet du triangle différent, sont concourantes. Leur point de concours est le centre d'un des cercles exinscrits du triangle.*

dém: on utilise le théorème de Céva en disant que la bissectrice intérieure de l'angle en A coupe [BC] en I_A bary de (B,b) et (C,c), la bissectrice extérieure de l'angle en A est // à [BC] (triangle (BAC) isocèle en A) ou coupe (BC) en I'_A Barycentre de $(B,-b)$ et (C,c).

Conséquence: si A', B' et C' sont les centres des trois cercles exinscrits du triangle (ABC) alors (A'B'C') est le triangle orthique du triangle (A'B'C').

3) Tangentes à un cercle.

Proposition: Soit $\mathcal{C}$ un cercle et M un point extérieur à ce cercle. Il existe exactement deux droites D et D' passant par M et tangentes à ce cercle.

dem : faire une figure. Le cercle de centre I milieu de [OM] coupe $\mathcal{C}$ en T et T' si O centre de $\mathcal{C}$. (MT) et (MT') sont alors tangentes à $\mathcal{C}$ ($(MT) \perp (TO)$ et $(MT') \perp (T'O)$).

Conséquence : (OM) est l'une des bissectrices des droites D et D' car la réflexion d'axe (OM) échange (MT) et (MT'); c'est aussi l'une des bissectrices des droites (OT) et (OT')

4) Décomposition de rotations en produit de réflexions

def on appelle rotation toute isométrie admettant un seul point fixe O ou l'identité.

Th la composée de 2 réflexions d'axes sécants en O est une rotation de centre O.

dém $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ laisse O fixe

$s_{\Delta'}(M) = M_1 \quad s_\Delta(M_1) = M_2$ alors $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = 2(\vec{OH'}, \vec{OH})$ [2π]

pour M distinct de O donc $M \neq M'$

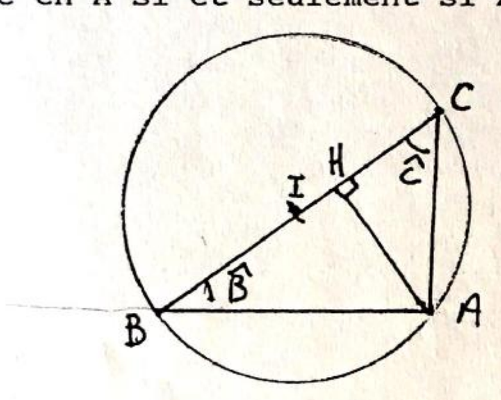
Pré-requis: produit scalaire, déterminant, trigonométrie

4)

RELATIONS METRIQUES ET TRIGONOMETRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Refaire la fin

Dans toute la suite ABC désigne un triangle non aplati, H le pied de la hauteur issue de A, I le pied de la médiane issue de A. $\hat{A}$ est la mesure en radian de l'angle géométrique des deux demi-droites [AB) et [AC). De même $\hat{B}$ et $\hat{C}$. On a donc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in]0, \pi[$, et $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, et le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\hat{A} = \pi/2$, soit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.



Certaines relations caractérisent les triangles rectangles:

I Relations caractéristiques du triangle rectangle.

Théorème 1 (Pythagore). ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. D'où: $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Proposition 2. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$2IA = BC.$$

En effet: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}) = AI^2 - IB^2$

$$= AI^2 - \frac{1}{4} BC^2 .$$

Corollaire 3. ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre [BC].

On a les relations suivantes:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB^2 - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2 - \overline{BC}.\overline{BH}$. On utilise un vecteur unitaire porté par (BC) pour définir les mesures algébriques.

On a aussi: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BC}.\overline{BH} = BA.BC\cos\hat{B}$. Des relations précédentes on tire:

Proposition 4. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$AB^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$$

Proposition 5. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$\cos\hat{B} = \frac{BA}{BC}$$

On obtient des relations similaires en permutant B et C. ← le faire

On peut aussi calculer: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = AH^2 + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} =$

$$= AH^2 + \overline{HB}.\overline{HC}.$$ D'où:

Proposition 6. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}.$$

On sait la formule: $|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = AB.AC\sin\hat{A}$, de sorte que ABC est rectangle en A si et seulement si $|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = AB.AC$.

Mais on a: $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = \det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) =$

$= \det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}) = \det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{HA}) = \varepsilon\, BC.AH$ car BC et HA sont perpendiculaires. On a donc:

Proposition 7. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$AB.AC = BC.AH.$$

On peut aussi écrire: $|\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})| = BC.BA\sin\hat{B} = |\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = AB.AC\sin\hat{A}$

On obtient ainsi:

Proposition 8. ABC est rectangle en A si et seulement si:

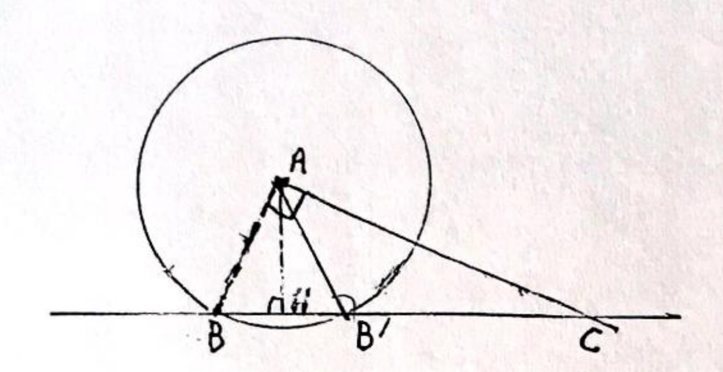
$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$, relation similaire par échange de B et C.

Proposition 9. ABC est rectangle en A si et seulement si:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{AC}{AB} \text{ et } \operatorname{tg}\hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

La condition nécéssaire découle des propositions 5 et 8. Si réciproquement on a $\operatorname{tg}\hat{C} = +\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \hat{B})$, et puisque $\hat{B} + \hat{C} \in]0,\pi[$, on trouve: $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ et donc $\hat{A} = 0$.

Il faut remarquer qu'une seule des deux relations de la proposition 9 ne suffit pas à établir que le triangle est rectangle, comme on le voit sur la figure ci-dessous, où le triangle AB'C n'est pas rectangle.



II Relations non caractéristiques.

Proposition 10. Si ABC est rectangle en A, alors:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

Proposition 11. Si ABC est rectangle en A, alors:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

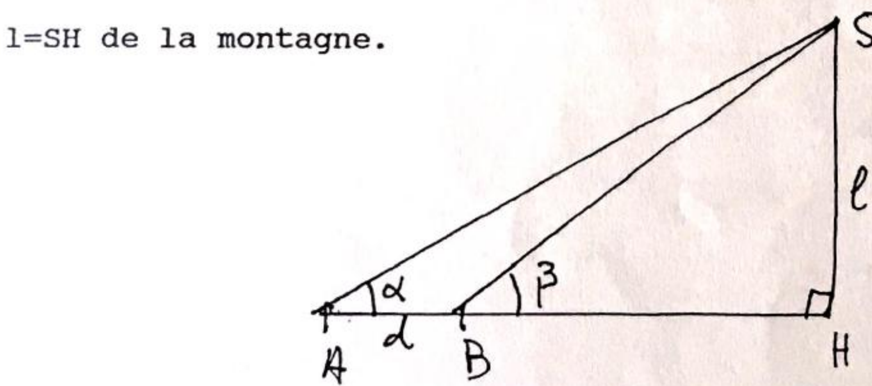
On part de la relation de la proposition 7 élevée au carré que l'on divise

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2\ AC^2}$$,d'où le résultat. La même figure que ci-dessus

prouve que la condition n'est pas suffisante.

III Applications.

Sur la figure ci-dessous, on connait d=AB, α, β. Calculer la hauteur l=SH de la montagne.

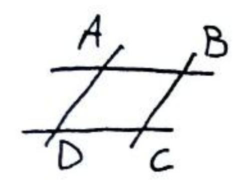


(34)

Propriétés caractéristiques des parallélogrammes. Caractérisation des rectangles, losanges, carrés.

<u>Definition 1</u> | Un parallélogramme est un quadrilatère $ABCD$ tel que :

$$\vec{AD} = \vec{BC} \quad \text{(ou de manière équivalente } \vec{AB} = \vec{DC}\text{)}.$$



A, B, C, D sont les sommets, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ les côtés, $[AC]$ et $[DB]$ les diagonales.

<u>Propriété 1</u>. Un parallélogramme est convexe.

Il est en effet facile de vérifier que c'est l'intersection des 4 demi-espaces limités par les supports des côtés.

<u>Caracterisation 1.</u> $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $(AB // DC)$ et $(AD // BC)$ et $ABCD$ non alignés.

(les côtés opposés sont 2 à 2 parallèles).

($\Rightarrow$) immédiat par la définition 1.

($\Leftarrow$) $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ forment une base et on a :

$\vec{AB} = \lambda \vec{DC}$, $\vec{AD} = \mu \vec{BC}$, d'où $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \frac{\vec{AD}}{\mu}$

et $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \frac{\vec{AB}}{\lambda} + \vec{AD}$.

d'où $\lambda = \mu = 1$.

préférer : $\begin{cases} \vec{DC} = \lambda \vec{AB} \\ \vec{BC} = \mu \vec{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} \\ \vec{AC} = \vec{AB} + \mu \vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \vec{AD} \underset{\text{base}}{\Rightarrow} \lambda = \mu = 1. \end{array}$

<u>caractérisation 2.</u> $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ les diagonales se coupent en leur milieu (et $ABCD$ non alignés)

($\Rightarrow$) immédiat car $\vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{AI}$ (I milieu de $[AC]$)
" " $= \vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AJ}$ (J milieu $[BD]$) $\Rightarrow I = J$.

($\Leftarrow$) Soit I le milieu de $[AC]$ et $[BD]$ et σ_I la symétrie de centre I.

$s_I((AD)) = (CB) \Rightarrow AD // CB$. de même $AB // DC$. On utilise alors la caractérisation 1.

Caractérisation 3 ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow$ (ABCD convexe non aplati et les côtés opposés sont 2 à 2 égaux)

($\Rightarrow$) Immédiat par la définition
($\Leftarrow$) Soit D' intersection de la parallèle à AB par C et de la parallèle à BC par A. ABCD' est un parallélogramme par la caractérisation 1. Or $CD = AB$, $AD = BC$. Donc D est un des deux points d'intersection des cercles $\mathcal{C}(C, AB)$ et $\mathcal{C}(A, BC)$. Ces 2 points sont de part et d'autre de la ligne des centres AC. Un seul d'entre eux est donc dans le 1/2 plan limité par AC ne contenant pas B, et c'est D'. Puisque ABCD est convexe, $D = D'$ et ABCD est un parallélogramme.

Propriété angulaire. (ABCD) parallélogramme $\Rightarrow \begin{cases} (\vec{BA}, \vec{BC}) = +(\vec{DC}, \vec{DA}) \\ (\vec{CB}, \vec{CD}) = -(\vec{AB}, \vec{AD}) \end{cases}$

[les angles "opposés" sont opposés.] Immédiat par la symétrie de centre I.

De plus : $(\vec{AD}, \vec{AB}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) = (\vec{AD}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) - \pi$
$= -\pi + (\vec{AD}, \vec{BC}) = -\pi$.

[les angles consécutifs sont supplémentaires].

Rectangle.

définition 2. | Un rectangle est un parallélogramme ayant 1 angle droit.

Il en résulte (propriété angulaire) que les 4 angles sont droits.

Caractérisation 4 | Un quadrilatère ayant 4 angles droits est un rectangle.

En effet on utilise la caractérisation 1 et la définition 2.

Si un quadrilatère convexe a 3 angles droits, c'est un rectangle: en effet la somme des angles vaut 2π, et le quatrième angle est droit.

Caractérisation 5. | Un parallélogramme est un rectangle ssi ses diagonales sont égales.

Soit I le milieu des diagonales. Si $AC = BD$ alors:

IAB isocèle $\widehat{IBA} = \widehat{IAB} = \widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \alpha$

IBC " $\widehat{ICB} = \widehat{IBC} = \beta$

$2\alpha + 2\beta = \pi$ (triangle ABC)

donc $\widehat{ABC} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Réciproquement si ABCD est un rectangle, ABC est inscrit dans le cercle de centre I et rayon $\frac{AC}{2}$, donc $IA = IB = IC$, et $AC = BD$.

Losange.

définition 3. Un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

Caractérisation 6. Un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs (donc tous ses côtés) égaux.

ABCD losange ⇒ IA médiatrice de BD donc AD = AB.

réciproque : Si AB = AD, alors BC = CD (car parallélogramme) et AC est la médiatrice de BD, d'où AC ⊥ BD.

Carré. Un carré est un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange.

Un parallélogramme est un carré ssi il a un angle droit et des diagonales perpendiculaires, ou un angle droit et 2 côtés consécutifs égaux, ou des diagonales égales et perpendiculaires.

Un carré a 4 côtés égaux, et des diagonales égales et perpendiculaires ainsi que 4 angles droits.

Application. C.N.S pour que les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe soient cocycliques.

sol. DA // HF, CB // HF ⇒ DA // CB et ABCD ; idem AB // DC ; est un parallélogramme.

Il est inscriptible ⇔ rectangle
⇓
EG ⊥ FH.

inscrip ⇔ rect.

O centre du cercle

O = ∩ des méd. des diag ⇒ O centre du #
⇓
diag égales ⇒ rect.

(36)

Connaissant : - Isométries et ses propriétés (application affine, bijective)
- Rotation réflexions et composées
- Isométrie laissant 1 point fixe (au moins)

On se place dans $\mathcal{E}$ plan affine euclidien orienté

I Isométrie conservant une figure donnée :

Déf : Soit F une partie de $\mathcal{E}$ et f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$
On dit que f conserve F si $f(F) = F$

Thm 1 : L'ens I des isométries qui conservent une partie F de $\mathcal{E}$ est un groupe

Dem : Soit I cet ens. $*$ $I \neq \emptyset$ car $Id \in I$
$*$ $f \in I$ et $g \in I \Rightarrow f \circ g(F) = f(F) = F$ donc $f \circ g \in I$
$*$ $f \in I$, f application bij. $\Rightarrow f^{-1}$ existe
$f^{-1} \circ f(F) = Id(F) = F$ et $f^{-1} \circ f(F) = f^{-1}(F) = F \Rightarrow f^{-1} \in I$

Thm 2 (conservation du barycentre)
Soit F un ens. fini de pts de $\mathcal{E}$ et si f est une isométrie qui conserve F,
l'isobarycentre des pts de F est un pt fixe de $f \Rightarrow f$ applic. affine

Dem. f est une bijection de $F \to F$ donc $\{f(A_1), .. f(A_n)\} = \{A_1, \dots, A_n\} = F$
$\Rightarrow$ le barycentre $f(A_1), \dots, f(A_n)$ est l'isobaryc de $(A_1, \dots, A_n)$

Conséquence Pour résoudre le problème posé, on cherchera donc les isométries ayant un pt fixe O l'isobarycentre $\Rightarrow$ - réflexion d'axe passant par O
ou symétrie centrale de centre O
ou rotation de centre O

Thm 3 : Soit F un ensemble fini de pts $\{A_1, \dots, A_n\}$ alors $\exists$ un homomorphisme de groupe $\varphi . I \to \mathcal{S}_n$ (avec $\mathcal{S}_n$ groupe des permutation

Dem : Considérons l'application $\varphi : I \to \mathcal{S}_n$

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ f(A_1) & f(A_2) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$$

Montrons que φ morphisme : c-à-d $f \in I$ et $g \in I$ $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$

on a $\varphi(f \circ g) = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ f \circ g(A_1) & \dots & f \circ g(A_n) \end{pmatrix}$ et $\varphi(f)\varphi(g) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ f(A_1) & f(A_2) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ g(A_1) & & g(A_n) \end{pmatrix}$

$\forall j \in \{1, .., n\}$ $A_j \mapsto g(A_j)$ par $\varphi(g)$ or $g \in I$ donc $\exists i \in \{1, .., n\}$ tq $g(A_j) = A_i$
donc $g(A_j) \longmapsto f(A_i)$ par $\varphi(f)$ d'où $\forall j \in \{1, .., n\}$ $A_j \mapsto f \circ g(A_j)$ par $\varphi(f)\varphi(g)$
d'où $\varphi(f \circ g) = \varphi(f)\varphi(g)$

Conséquence : Ceci nous assure que I est fini (I isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$)

II Isométries conservant les quadrilatères convexes.

Soit $F = \{A, B, C, D\}$ et O l'isobarycentre de A, B, C, D

1°) #

Def : un # est un ensemble de 4 pts (A, B, C, D) non alignés tq $\vec{AB} = \vec{DC}$

Thm 4 : Pour un # qui n'est ni un rectangle, ni un losange alors $I = \{Id, s_O\}$ où s_O est la sym. centrale de centre O

Dem : (A, B, C, D) n'est pas rect. $\Rightarrow$ les diagonales sont de longueurs $\neq$
Supposons que $[BD]$ soit la diagonale la plus grande. C'est également la plus grande des longueurs des segments joignant 2 pts de F
f est une isométrie donc $f(B)f(D) = BD$ donc $\{f(B), f(D)\} = \{B, D\}$

1er cas : $\begin{cases} f(B) = B \\ f(D) = D \end{cases}$ on a de plus $O \in (BD)$ qui est fixe, donc (BD) fixe par f pt par pt d'où $f = Id$ ou $f = s_{(BD)}$
or $(ABCD)$ n'est pas un losange donc (AC) et (BD) ne sont pas perpendiculaires d'où $f = Id$ est la seule solution

2ème cas $\begin{cases} f(B) = D \\ f(D) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_O \circ f(B) = B \\ s_O \circ f(D) = D \end{cases}$
Donc $s_O \circ f$ vérifie le 1er cas d'où $s_O \circ f = Id \Rightarrow f = s_O$ solution

2°) Rectangle :

Def : Un rect est un # dont les diagonales ont même longueur

Thm 5 : Pour un rectangle qui n'est pas un carré alors $I = \{Id, s_O, s_\Delta, s_{\Delta'}\}$
avec $\begin{cases} s_\Delta & \text{réflexion d'axe la médiatrice de } [AD] \\ s_{\Delta'} & \text{——— } [AB] \end{cases}$

Dem : $\{A, B, C, D\}$ est un rect. donc ses diagonales ont même longueur
Ainsi $AC = BD$ est la plus grande longueur
comme f est une isométrie $f(A)f(C) = AC = BD$

1er cas : $\{f(A), f(C)\} = \{A, C\}$ l'étude du thm 4 donne $f = Id$ ou $f = s_O$.

2ème cas : $\{f(A), f(C)\} = \{B, D\}$

i) $\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{\Delta'} \circ f(A) = A \\ s_{\Delta'} \circ f(C) = C \end{cases}$
$s_{\Delta'} \circ f$ vérifie le 1er cas de la dem du thm 4 donc $s_{\Delta'} \circ f = Id \Rightarrow f = s_{\Delta'}$

ii) $\begin{cases} f(A) = D \\ f(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_\Delta \circ f(A) = A \\ s_\Delta \circ f(C) = C \end{cases}$ Par le même argument que précédemment on a $f = s_\Delta$

remarque : groupe d'ordre 4 ~~[illegible]~~ commutatif
dont tous les éléments st d'ordre 2
c'est le groupe de Klein

3°) Le losange

Déf : un losange est un # dont les diagonales sont ⊥

Thm 6 : Pour un losange qui n'est pas un carré $I = \{Id, s_O, s_{(AC)}, s_{(BD)}\}$

Dem : (A,B,C,D) losange, non carré donc ses diagonales sont de longueurs ≠
Supposons que [BD] soit la diagonale la plus grande donc
$f(B)f(D) = BD$ d'où $\{f(B), f(D)\} = \{B, D\}$

1er cas : $\begin{cases} f(B) = B \\ f(D) = D \end{cases}$ Donc la droite (BD) est fixe d'où $f = Id$ ou $f = s_{(BD)}$
comme $(AC) \perp (BD)$ et $OA = OC$ donc $f = Id$ et $f = s_{(BD)}$ sont solutions

2ème cas : $\begin{cases} f(B) = D \\ f(D) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_O \circ f(B) = B \\ s_O \circ f(D) = D \end{cases}$ Donc $s_O \circ f$ vérifie le 1er cas de la dem
d'où $s_O \circ f = Id$ ou $s_O \circ f = s_{(BD)}$

or $s_O = s_{(AC)} \circ s_{BD}$ donc $f = s_O$ ou $f = s_{(AC)}$

4°) Le carré :

Déf : le carré est un losange dont les diagonales sont égales

Thm 7 : Pour un carré $I = \{Id, s_O, s_{(AC)}, s_{(BD)}, s_{\Delta}, s_{\Delta'}, r(O, \frac{\pi}{2}), r(O, -\frac{\pi}{2})\}$

Dem : (A,B,C,D) est un carré donc ses diagonales ont même longueur AC = BD
donc $\{f(A), f(C)\} = \{A, C\}$ ou $\{B, D\}$

1er cas : i) $\begin{cases} f(A) = A \\ f(C) = C \end{cases}$ ⇒ la droite (AC) est invariante par f donc $f = Id$ ou $f = s_{(AC)}$

ii) $\begin{cases} f(A) = C \\ f(C) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_O \circ f(A) = A \\ s_O \circ f(C) = C \end{cases}$ donc $s_O \circ f$ vérifie i) d'où $s_O \circ f = I$ ou $s_O \circ f = s_{(AC)}$
donc $f = s_O$ ou $f = s_{(BD)}$

2ème cas : $\{f(A), f(C)\} = \{B, D\}$

i) $\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(O, \frac{\pi}{2}) \circ f(A) = C \\ r(O, \frac{\pi}{2}) \circ f(C) = A \end{cases}$ donc $r(O, \frac{\pi}{2}) \circ f$ vérifie le ii) du 1er cas
donc $r(O, \frac{\pi}{2}) \circ f = s_O$ ou $r(O, \frac{\pi}{2}) \circ f = s_{BD}$
d'où $f = r(O, -\frac{\pi}{2}) \circ s_O$ ou $f = r(O, -\frac{\pi}{2}) \circ s_{(BD)}$
⇒ $f = r(O, \frac{\pi}{2})$ car $s_O = r(O; \pi)$ ou $f = s_{\Delta'}$ car $r(O; -\frac{\pi}{2}) = s_{\Delta'} \circ s_{(BD)}$

ii) $\begin{cases} f(A) = D \\ f(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_O \circ f(A) = B \\ s_O \circ f(C) = D \end{cases}$ ⇒ $s_O \circ f$ vérifie le i) du 2ème cas

donc $s_O \circ f = r(O; \frac{\pi}{2})$ ou $s_O \circ f = s_{\Delta'}$
⇒ $f = s_O \circ r(O, \frac{\pi}{2}) = r(O, -\frac{\pi}{2})$ (car $s_O = r(O, -\pi)$)
ou $f = s_O \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta}$ (car $s_O = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$)

Remarque. On peut partir du carré pour arriver au parallélogramme !

(37) Droites remarquables dans le triangle : médiatrices, hauteurs, médianes, bissectrices ..... [utri0001]

On considère dans le plan affine trois points A, B, C non alignés. On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC], C' le milieu de [AB]. Le plan affine sera pris euclidien et même euclidien orienté si nécessaire. Dès qu'une notation est introduite, elle sera conservée par la suite.

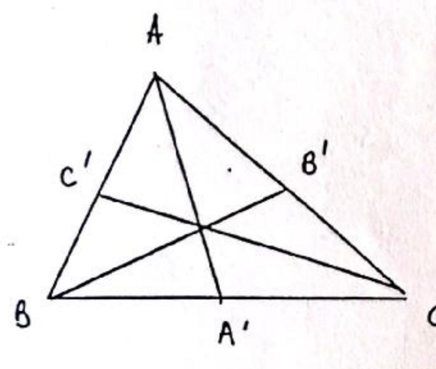
A. Médianes.

Def : Dans le triangle (ABC) on appelle médiane issue de A la droite (AA').

Prop : Les trois médianes d'un triangle (ABC) sont concourantes en un point G tel que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

dém : (AA') ∩ (BB') existe car B et B' ne sont pas dans le même demi-plan séparé par (AA') ; la symétrie d'axe (AA') et de direction (BC) envoie B sur C et C' sur B' (elle conserve les milieux) donc la droite (BB') sur la droite (CC') ; comme (BB') n'est pas parallèle à (AA') alors (BB') ∩ (CC') existe et appartient à (AA') (Il faut se rappeler que si s est une symétrie oblique d'axe Δ et direction Δ' alors

$\forall \mathcal{D}$ $\mathcal{D} // \Delta$ ou $\mathcal{D} \cap s(\mathcal{D}) \in \Delta$.



$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{GA}+2\vec{GA'}$ colinéaire à $\vec{AA'}$
$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=2\vec{GC'}+\vec{GC}$ colinéaire à $\vec{CC'}$
donc $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ les vecteurs $\vec{AA'}$ et $\vec{CC'}$ étant indépendants.

B. Médiatrices.

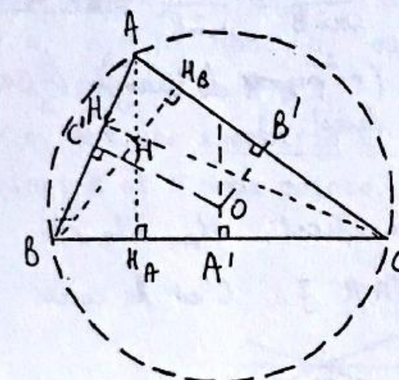
Def : On appelle médiatrice du segment [BC] la droite perpendiculaire à (BC) en A' milieu de [BC]

Rappel : la médiatrice d'un segment [BC] est l'ensemble des points

équidistants de B et C.

Prop: Les trois médiatrices d'un triangle (ABC) sont concourantes en un point O, centre d'un cercle passant par A, B et C appelé cercle circonscrit au triangle (ABC). Si le plan affine euclidien est orienté, O a pour coordonnées barycentriques dans le repère (A,B,C): $(\sin 2\hat{A}, \sin 2\hat{B}, \sin 2\hat{C})$ si $\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\hat{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\hat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

dém: les médiatrices de [AB] et [AC] sont sécantes car (AB) ∦ (AC). Alors



O le point d'intersection vérifie:

$O \in$ méd [AB] $\Rightarrow OA = OB$
$O \in$ med [AC] $\Rightarrow OA = OC$ } $\Rightarrow OB = OC$

$\Rightarrow O \in$ med [BC]

O est barycentre de $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

d'où $\alpha\,\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{0}$ et $0 = \alpha R^2 \sin 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \gamma R^2 \sin 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

d'où $\dfrac{\alpha}{\sin 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \dfrac{\gamma}{\sin 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$. (si le triangle (ABC) n'est rectangle ni en A ni en C – étudier à part ce cas)

C. Hauteurs

Déf Dans le triangle (ABC) on appelle hauteur issue de A la perpendiculaire à (BC) contenant A.

On note H_A = l'intersection de cette hauteur et de (BC).

Prop: Les trois hauteurs (AH_A), (BH_B), (CH_C) du triangle ABC sont concourantes en un point H, appelé orthocentre du triangle (ABC) et on a de plus $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

dém: deux hauteurs (AH_A) et (BH_B) sont concourantes car (CB) non // à (AC).

l'homothétie h de centre G et rapport −2 envoie A' sur A, B' sur B, C' sur C et (A'O) sur la droite // à (A'O) passant par h(A') = A donc sur la hauteur (AH_A) donc $(AH_A) \cap (BH_B) \cap (CH_C)$ existe comme image du point de concours O des médiatrices du triangle (ABC)

donc (AH_A), (BH_B), (CH_C) sont concourantes en un point H tel que

$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

Prop : si H n'est pas confondu avec A, B, ou C, H a pour coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) : $(\operatorname{tg}\hat{A}, \operatorname{tg}\hat{B}, \operatorname{tg}\hat{C})$.

dem : on suppose H barycentre de (A,α) (B,β), (C,γ) et on projette orthogonalement sur (BC) donc H_A barycentre de (B,β) et (C,γ) donc si $H_A \neq B$ ou $H_A \neq C$ on a

TB

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BH_A}\cdot\overline{BC}}{BA\cdot BC} = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{BA.BC} \qquad \cos\hat{C} = \frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{CA\cdot CB} = \frac{\overline{CH_A}\cdot\overline{CB}}{CA\cdot CB}$$

d'où $$\frac{\overline{BH_A}}{\overline{CH_A}} = -\frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}}\,\frac{AB}{AC}$$ or $$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

E

d'où $$\frac{\overline{BH_A}}{\overline{CH_A}} = -\frac{\operatorname{tg}\hat{C}}{\operatorname{tg}\hat{B}}$$ (on suppose le triangle (ABC) direct)

Prop Le cercle circonscrit au triangle (A'B'C') contient H_A, H_B, H_C et le milieu des segments [A H], [A H], [A H]. C'est le cercle d'Euler de centre ω.

[U] Cercles "Cercle d'Euler"

E

dem : si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle (ABC) alors $h_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ cercle circonscrit au triangle (A'B'C') et h_1 est l'une des homothéties qui échangent $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. $h(O) = \omega$ $\quad \vec{GO} = -2\vec{G\omega}$ L'autre homothétie h_1 a pour centre H et rapport $+\frac{1}{2}$: en effet :

$h_1 = h(G, -\frac{1}{2})$ — pb de notation !

$$\vec{H\omega} = \vec{HO} + \vec{O\omega} = \frac{1}{2}\vec{HO}$$

$\vec{HO} = -2\vec{O\omega}$

donc h_1 envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ donc $h_1(A) \in \mathcal{C}'$ or $h_1(A)$ = milieu de [A H]

Pour H_A :

Δ O ω H' A' H_A H_1 A $\vec{t}$

ω milieu de [O H]

$A' \in \mathcal{C}' \Rightarrow \omega A' = \omega H_A$

dans le trapèze rectangle $OA'H_AH$

$\Rightarrow H_A \in \mathcal{C}'$.

Prop : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ et le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC)

dem : $\vec{OH} = 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Rightarrow \vec{OH} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA'}$

$\Rightarrow \vec{AH} = 2\vec{OA'}$. Soit $H_1 = s_{BC}(H)$ $\quad H_1 \xrightarrow{s_{BC}} H \xrightarrow{t_{\vec{HA}}} A$

E

$t_{\vec{HA}} = s_{BC} \circ s_{\Delta}$ avec $\Delta // (BC)$ et $\Delta = t_{\frac{1}{2}\vec{HA}}(BC) = t_{\vec{A'O}}(BC)$

donc $O \in \Delta \Rightarrow H_1 = s_{\Delta}(A)$ avec $O \in \Delta$ donc $OH_1 = OA$.

TB mais compliqué. On peut utiliser l'homothétie de centre H et de rapport 2 qui, d'après la Pro. préc., transforme $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$ — Voir [U] Cercles

D. Bissectrices.

Def : Si $[AB[$ et $[A,C[$ sont deux demi-droites on appelle bissectrice intérieure de $([AB[,[A.C[)$ ou $(\vec{AB},\vec{AC})$ l'unique droite Δ contenant A telle que $s_\Delta([AB[)=[AC[$. Rappel la bissectrice intérieure est contenue dans l'ensemble des pts équidistants de (AB) et (AC)

Prop Les trois bissectrices intérieures du triangle ABC sont concourantes en un point I centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Dans le repère (A,B,C) I a pour coordonnées barycentriques (a, b, c)

dém : la bissectrice intérieure de $([AB[,[A.C[)$ coupe BC en I_A.
alors (AI_A) sépare le plan en deux demi-plans et B et I_B sont de part et d'autre de (AI_A) $\Rightarrow$ $[BI_B]$ coupe (AI_A)
$[AI_A]$ coupe $[BI_B]$ (BI_B) E

$\Rightarrow (AI_A)\cap(BI_B)=I$ existe et même appartient à $[BI_B]$ et $[AI_A]$
I est équidistant de (AB), (AC) et (BC)
de même le pt d'$\cap$ de (BI_B) et (CI_C) donc $I\in[BI_B]\cap[AI_A]\cap[I_C]$
I est intérieur au triangle ; ses coordonnées barycentriques sont toutes de même signe, elles sont proportionnelles aux aires donc à (a, b, c).

E Prop : Une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures (→ non défini) se coupent en un point centre du cercle exinscrit, de coordonnées barycentriques (-a, b, c) si on a pris la bissectrice intérieure de l'angle en A.

dém : si (AI_A) et la bissectrice extérieure ne se coupent pas alors

E $(\vec{AB},\vec{AI_A})=(\vec{By},\vec{Bx})$ $[2\pi]$ $\Rightarrow$ $2(\vec{AB},\vec{AI_A})=2(\vec{By},\vec{Bx})$ $[2\pi]$
$\Rightarrow$ $(\vec{AB},\vec{AC})=(\vec{By},\vec{BC})$ $[2\pi]$
$=\pi-(\vec{BC},\vec{BA})$ $[2\pi]$
$\Rightarrow (\vec{AB},\vec{AC})+(\vec{BC},\vec{BA})=\pi$ $[2\pi]$
$\Rightarrow (\vec{CA},\vec{CB})=0$ $[2\pi]$ exclus
donc $(AI_A)\cap(Bx)=J$ et J est équidistant de (AB), (AC) et (BC) donc J appartient à
E(la bissectrice extérieure en C
ou intérieure pardi !
les coordonnées barycentriques de J sont pour deux)) non prouvé d'entre elles positives, pour l'une d'entre elle négative et leurs valeurs absolues sont proportionnelles aux aires.

Faux. Ici les "bissectrices" sont des demi-droites (cf fig. ci-contre) et on peut avoir : les dtes en pointillé ne se coupent pas et pourtant les angles ∡∡ sont différents !

Donc : prendre des bissectrices qui sont des droites et obtenir $(\vec{AB},\vec{AI_A})=(\vec{By},\vec{Bx})$ $[\pi]$
d'où $(\vec{CA},\vec{CB})=0$ $[\pi]$ qui est tout autant absurde que $(\vec{CA},\vec{CB})=0$ $[2\pi]$

(38)

RÉFLEXIONS ET ROTATIONS DU PLAN. INVARIANTS ÉLÉMENTAIRES: EFFET SUR LES DISTANCES, LES ANGLES, L'ALIGNEMENT... APPLICATIONS À L'ACTION SUR LES CONFIGURATIONS USUELLES.

Pour cette leçon, la médiatrice d'un segment et ses propriétés sont connues.

I Réflexions

Définitions : Soit Δ une droite du plan euclidien. On appelle réflexion d'axe Δ l'application s_Δ qui à tous point M du plan associé le point M' tel que Δ est la médiatrice du segment $[M\,M']$.

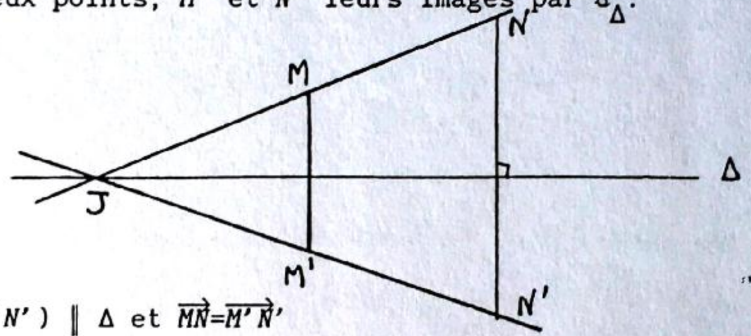
Propriétés:

1/ $s_\Delta \circ s_\Delta = Id$ donc s_Δ est une bijection .

2/ $s_\Delta(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$

3/ s_Δ est une isométrie :

soient M et N deux points, M' et N' leurs images par s_Δ.



Si $(MN) \parallel \Delta$, $(M'N') \parallel \Delta$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

Si $(MN) \cap \Delta = J$, J est l'un des points de la médiatrice commune de $[M\,M']$ et $[N\,N']$ donc $JM = JM'$, $JN = JN'$. De plus J est l'un des centres d'homothéties qui envoie le segment $[MM']$ sur le segment $[NN']$ donc $\overrightarrow{JM} = \alpha \overrightarrow{JN} \Rightarrow \overrightarrow{JM'} = \alpha \overrightarrow{JN'}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$

4/. s_Δ est donc une applications affine:

la démonstration est à la fin en annexe. (ne doit pas figurer dans la leçon mais à connaître pour répondre aux questions)

En conséquence s_Δ conserve l'alignement, le parallélisme, les barycentres, l'orthogonalité

L'application linéaire associée à s_Δ est la symétrie orthogonale d'axe $\vec{\Delta}$.

5/.On admet que: une réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé c'est à dire:

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = -\left(s(M)\,s(M),\ s(P)\,s(Q)\right)\ [2\pi]$. C'est un antidéplacement.

II Rotations:

1/ Définition: Soit O un point du plan et θ un réel. On appelle rotation de centre O toute isométrie du plan n'admettant qu'un point fixe O, ou l'identité.

Remarque: si r est distincte de l'identité, r à pour seul point fixe O.

2/ Proposition: Toute rotation de centre O est le produit de deux réflexions d'axes passant par O.

Démonstration: Soit M un point du plan $M \neq O$, $r(M)$ son image par la rotation r de centre O. La médiatrice de $[M\,r(M)]$ passe par O car $OM = Or(M)$

$s_\Delta \circ r(O) = O$ et $s_\Delta \circ r(M) = M$ donc $s_\Delta \circ r$ admet la droite (OM) comme points fixes (toute isométrie admettant deux points fixes distincts et B admet tout point de (AB) comme pt fixe : $M \in (AB) \Rightarrow M = \mathcal{C}(A, AM) \cap \mathcal{C}(B, BM)$ $\Rightarrow$ l'image de M appartient à $\mathcal{C}(A, AM)$ et $\mathcal{C}(B, BM)$ donc c'est M)

'est donc l'identité ou la réflexion d'axe $(OM)^*$. Or. $s_\Delta \circ r = Id \Rightarrow$ $r = s_\Delta$ exclu, donc $s_\Delta \circ r = s_{(OM)}$, $r = s_\Delta \circ s_{(OM)}$.

* une isométrie admettant au moins une droite D de points fixes est soit l'identité, soit la réflexion d'axe D car si $N \notin D$ est tel que $N \neq N'$ son image, alors tout point de D est équidistant de N et N' donc D est la médiatrice de $[NN']$.

remarque nous avons démontré ici que $r = s_\Delta \circ s_{(OM)}$ avec M point arbitraire du plan, donc nous avons montré que $r = s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ avec Δ' arbitraire contenant O.

Pour montrer que $r = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta''}$ avec Δ arbitraire contenant O, montrer que $r^{-1} = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'}$, r^{-1} rotation et puis $r = (s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'})^{-1} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta''}$.

3/ Conséquences:

* Toute rotation est une bijection comme composée de bijections, une isométrie comme composée d'isométries, une application affine comme composée d'applications affines ou comme isométrie.

* Toute rotation conserve les mesures d'angles:

$\forall M,N,P,Q \quad (\overrightarrow{r(M)\,r(N)}, \overrightarrow{r(P)\,r(Q)}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \; [2\pi]$ (comme composée de 2 réflexions)

$\forall M,N \; (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{r(M)\,r(N)}) = \theta \; [2\pi]$ si r est une rotation d'angle de mesure θ

En effet $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{r(M)r(N)}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{r(O)\,r(M)}) + (\overrightarrow{r(O)r(M)}, \overrightarrow{r(M)r(N)})$

si $r(O) = O$ $= (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN})$ par l'égalité précédente

$= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}) = 2(\vec{u}, \vec{v}) \quad [2\pi]$

si $r = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$.

(figure : droites Δ et Δ' sécantes en O, vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

* L'application linéaire associée à une rotation est la composée de deux symétries vectorielles orthogonales: pour toute rotation r distincte de l'identité, l'application linéaire associée à r n'admet que $\vec{0}$ comme vecteur invariant. (si elle avait un vecteur invariant non nul, r aurait une droite de points invariants).

* L'ensemble des rotations de même centre O muni de la loi de composition est un groupe commutatif, sous-groupe des isométries fixant au moins le point O (on sait que ce groupe est constitué de l'identité, des réflexions d'axes passant par O, des rotations de centre O, c'est l'objet de la leçon. "Composées de réflexions du plan fixant un point donnée...").

III Effet sur les configurations

1/ Les réflexions d'axe passant par O, les rotations de centre O transforment toute droite en une droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles (ce sont des applications affines).

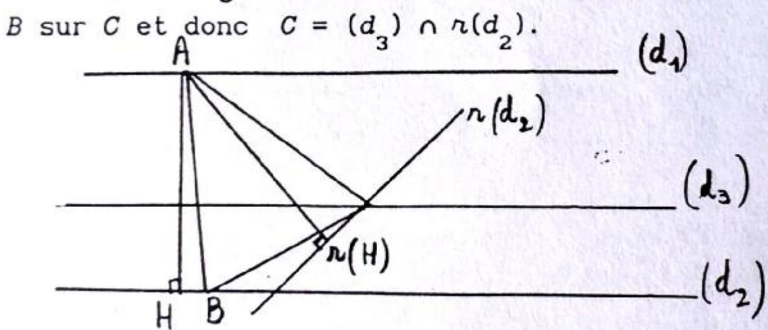
2/ Elles transforment tout cercle de centre I et rayon R en le cercle de centre l'image de I et de rayon R car ce sont des isométries.

3/ Toute isométrie conservant l'orthogonalité, elles transforment deux droites orhtogonales en deux droites orthogonales.

4/ Exercice d'application:

Construire un triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur trois droites parallèles données.

Analyse du problème: Soient d_1, d_2, d_3 les trois droites parallèles données.
Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ la rotation r de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie B sur C et donc $C = (d_3) \cap r(d_2)$.



Construction: soit A un point arbitraire de (d_1) ; r la rotation de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Alors $r(d_2) \cap (d_3) = C_1$ $\qquad r^{-1}(C_1) = B_1$

$r^{-1}(d_2) \cap (d_3) = C_2$ $\qquad r(C_2) = B_2$

(ces deux droites se coupent toujours car $r(d_2) \parallel (d_3) \Longrightarrow (d_2)(d_3)$ ce qui est exclus).

Le triangle $(A\ B_1\ C_1)$ est "direct" $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$,

Le triangle $(A\ B_2\ C_2)$ est indirect $(\overrightarrow{AB_2}, \overrightarrow{AC_2}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Remarque: pour construire $r(d_2)$ on projette orthogonalement A en M sur (d_2), on construit $r(M)$ et on mène en $r(M)$ la perpendiculaire à $(A\ r(M))$.

Annexe:

Isométrie.

Définition 1. On appelle isométrie toute application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que:

$\forall(M,N) \in \mathcal{P}^2 \ \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$.

Proposition 2. Toute isométrie de $\mathcal{P}$ est une application affine bijective dont l'application linéaire associée est une transformation orthogonale, et réciproquement toute application affine dont l'application linéaire associée est une transformation orthogonale est une isométrie.

Démonstration: . on rappelle qu'une application linéaire $\vec{f}$ du plan vectoriel euclidien dans lui-même est une transformation orthogonale si :

$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$.

. la réciproque est évidente.

. soit f une isométrie, soit O un point de $\mathcal{P}$. Définissons $\vec{f}$ par $\vec{f}(\vec{u})=\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ si $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Prouvons que $\vec{f}$ conserve le produit scalaire:

soit $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.

$2\ \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \|\vec{f}(\vec{u})\|^2+\|\vec{f}(\vec{v})\|^2-\|\vec{f}(\vec{u})-\vec{f}(\vec{v})\|^2$

$= \|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2+\|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2-\|\overrightarrow{f(O)f(M)}-\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2=\|\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2$ =

$= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\overrightarrow{NM}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2= 2\ \vec{u}.\vec{v}$ [f est une isométrie donc $\|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2=\|\overrightarrow{OM}\|^2$, $\|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2=\|\overrightarrow{ON}\|^2$, $\|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2=\|\overrightarrow{NM}\|^2$].

On a donc: $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$. $\vec{f}$ est donc une application linéaire bijective. En effet, soient $\vec{u},\vec{v}$ deux éléments de $\vec{P}$, α et β deux réels et $\vec{\omega} = \vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) - \alpha\ \vec{f}(\vec{u})-\beta\ \vec{f}(\vec{v})$. $\forall\vec{t}\in\vec{P} \quad \vec{\omega}.\vec{f}(\vec{t})= \vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{f}(\vec{t})-\alpha\ \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{t})-\beta\vec{f}(\vec{v}).\vec{f}(\vec{t})$.

$=(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{t} - \alpha\ \vec{u}.\vec{t} - \beta\ \vec{v}.\vec{t}=0$.

Appliquons ceci à $\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, puis $\vec{t}=\vec{u}$ puis $\vec{t}=\vec{v}$.

On obtient $\vec{\omega}.\vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})-\alpha\ \vec{\omega}.\vec{f}(\vec{u}) - \beta\ \vec{\omega}.f(\vec{v})= 0=\vec{\omega}\ .\ \vec{\omega}$ donc $\vec{\omega}=\vec{0}$.

$\vec{f}$ est injective car $\vec{f}(\vec{u})=\vec{0} \Longrightarrow \|\vec{f}(\vec{u})\|^2=\|\vec{u}\|^2=0 \Longrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ donc $\vec{f}$ est bijective (la dimension de $\vec{P}$ est 2), donc f l'est.

Projection orthogonale sur une droite du plan

LEÇON 39

0/ NOTIONS CONNUES

. Leçon "24."

. Produit scalaire

I/ DEFINITIONS ET THEOREMES

0°/ notations . $\mathcal{V}$ espace vectoriel associé au plan affine $\mathcal{P}$, muni de la norme euclidienne

- π projection vectorielle orthogonale
- p projection affine orthogonale

1°/ Projection vectorielle

DEF On appelle projection vectorielle π orthogonale de $(\mathcal{V})$ sur $(\lambda\vec{w})$ l'application de $\mathcal{V}$ dans $\lambda\vec{w}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe $p(\vec{u})$ avec $\vec{u} = \vec{u_1} + \pi(\vec{u})$ où $\begin{cases} \pi(\vec{u}) = k\vec{w} \ (k\in\mathbb{R}) \\ \vec{u_1} \cdot \pi(\vec{u}) = 0 \end{cases}$

THEO 1 La projection vectorielle orthogonale π de $\mathcal{V}$ sur $(\lambda\vec{w})$ est un endomorphisme d'image $S_1 = (\lambda\vec{w})$ et de noyau $S_2 = (\mu\vec{w}^{\perp})$: droite vectorielle de direction $\vec{w}^{\perp}$ tel que $\pi\circ\pi = \pi$

Preuve. D'après la leçon 24, on sait que π est un endomorphisme et $\pi\circ\pi = \pi$. Montrons que S_1 et S_2 sont orthogonaux.

$\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$ $\quad \vec{x} = \vec{x_1} + \pi(\vec{x})$ avec $\vec{x_1} \cdot \pi(\vec{x}) = 0$

$\pi(\vec{x}) \in Im\,\pi = S_1$

$\vec{x_1} \in Ker\,\pi = S_2$ car $\vec{x_1} \cdot \lambda\vec{w} = 0$ et $\pi(\vec{x_1}) = \vec{0}$

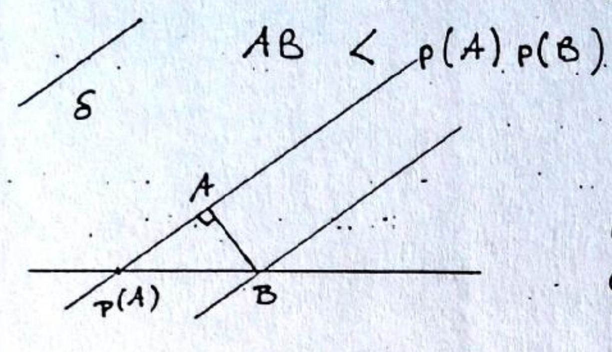
Donc S_1 et S_2 sont deux sev orthogonaux.

THEO 2 Pour tout endomorphisme π de $\mathcal{V}$ / $\pi\circ\pi = \pi$ et, $Ker\,\pi$, $Im\,\pi$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux, alors π est une projection vectorielle sur $Im\,\pi$, parallèlement à $Ker\,\pi$; π est donc une projection vectorielle orthogonale.

$AB \geq AH$ dans le triangle rectangle ABH $AB \geq A'B'$

- Si p est une projection non orthogonale, selon δ direction de projection, alors cherchons deux points A et B tels que

$$AB < p(A)\,p(B)$$



- $B \in \Delta \Rightarrow B = p(B)$
- A : projeté orthogonal de B sur la droite passant par $p(A)$ et de direction δ, qui existe car $\delta \not\perp \Delta$
$AB < p(A)\,p(B)$.

THEO 3 Dans la projection $p: M \longmapsto M_1$ sur (Δ) orthogonalement, l'ensemble des points fixes est Δ, de plus $p \circ p = p$.

<u>Preuve</u> <u>1° point</u> par définition

<u>2° point</u> si $M_1 = p(M)$ et $I \in \Delta$ $\overrightarrow{IM_1} = \vec{x_1} = \lambda \vec{\omega}$

$\Rightarrow \pi(\overrightarrow{IM_1}) = \overrightarrow{p(I)\,p(M_1)} = \overrightarrow{IM_1} = \pi[\overrightarrow{IM}]$

donc $\pi[\pi(\overrightarrow{IM})] = \pi[\overrightarrow{IM}]$

et $(\forall M \in \mathcal{P})$ <u>$p \circ p(M) = p(M)$</u> $\Leftrightarrow p \circ p = p$

THEO 4 Toute application affine p de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telque $p \circ p = p$ est la projection sur l'ensemble de ses points fixes (Δ) parallèlement à $\{\overrightarrow{p(M)M} \,/\, M \in \mathcal{P}\}$. Si il existe M tel que $\overrightarrow{p(M)M}$ et non nul est orthogonal à $\vec{\omega}$ (vecteur directeur de Δ) alors p est la projection orthogonale sur Δ.

<u>Preuve</u> cf. Leçon 24 _ p est une application affine et $\overrightarrow{p(M)M}$ est orthogonal, donc p est une projection orthogonale sur Δ

<u>Remarque</u> La donnée d'un point M extérieur à (Δ) définit la projection p orthogonale sur Δ.

II CONSEQUENCES : PROPRIETES DE LA PROJECTION ORTHOGONALE

1) L'image d'une droite (AB) $(A \neq B)$ est soit la droite (Δ)
soit $\{H\}$ intersection de (AB) et (Δ) si $(AB) \perp (\Delta)$

A₁
B₁
B
A
H
(Δ)

<u>Preuve</u>. D'après la leçon 24, on sait que π est une projection sur $\mathrm{Im}\,\pi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\pi$. De plus, $\mathrm{Im}\,\pi$ et $\mathrm{Ker}\,\pi$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux donc π est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,\pi$ (droite vectorielle car $\vec{\mathcal{P}}$ est un espace de dimension.
$\vec{\mathcal{P}} = \mathrm{Im}\,\pi \oplus \mathrm{Ker}\,\pi$.)

2°/ Projection orthogonale affine

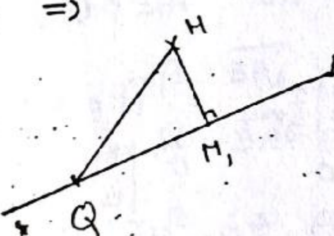
DEF On appelle p projection affine orthogonale de $\mathcal{P}$ sur (Δ), l'application affine qui laisse (Δ) fixe, d'endomorphisme π, projection vectorielle orthogonale sur $(\mathbb{R}\vec{w})$ où $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ.

<u>Remarque</u> • L'image de $\mathcal{P}$ par p est la droite (Δ) par définition
• Si $M \in \Delta$, alors $p(M) = M$ donc $p(\Delta) = \Delta$. (Δ) est l'ensemble des points fixes par p.

PROPRIETE CARACTERISTIQUE p est une application de $\mathcal{P}$ sur Δ.
p est une projection orthogonale sur (Δ)

ssi $\forall M \in \mathcal{P} \quad \forall Q \in (\Delta) \setminus \{p(M)\}$
$MM_1 < MQ$ avec $M_1 = p(M)$

<u>Preuve</u> $\Rightarrow$)



MM_1Q triangle rectangle en M_1
le théorème de pythagore nous permet d'écrire
$MQ^2 = MM_1^2 + M_1Q^2 > MM_1^2 \Rightarrow MQ > MM_1$

$\Leftarrow$ Réciproquement si $\forall M \in \mathcal{P}$
$\forall Q \in \Delta \setminus \{p(M)\} \quad MQ > M\,p(M)$

. Soit M_2 le projeté orthogonal de M sur Δ
si $p(M) \neq M_2$ $\quad MM_2 > M\,p(M)$
M_2 projeté orthogonal de M $\quad M\,p(M) > MM_2$ | contradiction

donc $p(M) = M_2$ et p est la projection orthogonale sur Δ

PROP. Parmi les projections affines sur une droite (Δ), la projection orthogonale p est la seule qui vérifie :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 \qquad p(A)\,p(B) \leq AB$$

<u>Preuve</u>. Si p est orthogonale soit $A' = p(A)$ et $B' = p(B)$
H projection orthogonale de A sur (BB')

B
A H
A' B'

2°/ Image d'un bipoint, de son milieu

- L'image d'un bipoint (A, B) non nul est un bipoint (A', B') non nul si (AB) n'est pas orthogonale à (Δ)
- L'image du milieu du bipoint (A, B) est le milieu des projetés du bipoint (Thalès ou barycentre).

3°/ Conservation de ~~deux bipoints~~ l'équipollence de deux bipoints.

4°/ Conservation du barycentre G des points A_i $(i \in \mathbb{N}_n)$ affectés des coefficient α_i $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0\right)$. L'image de G sera G' : bc de $\{p(A_i); \alpha_i\}$ pour $1 \leq i \leq n$.

III APPLICATIONS p : projection orthogonale sur $\Delta = (AB)$

1°/ Produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ si $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} \\ \vec{v} = \vec{AC} \\ H = p(C) \end{cases}$

2°/ Calcul de distance Soit $M \in P$ $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $(M \notin \Delta)$

$\Delta : ax + by + c = 0$ $\vec{v} \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ $\vec{u} \perp \vec{v}$

Calcul de la distance de $d(M, \Delta) = MM'$ avec $M' = p(M)$ $P \in (\Delta)$

on a $\vec{MM'} \cdot \vec{v} = 0$ ou $\vec{u} \cdot \vec{MP} = \vec{u} \cdot \vec{MM'}$

$\|\vec{u} \cdot \vec{MP}\| = \|\vec{u}\| \cdot MM'$

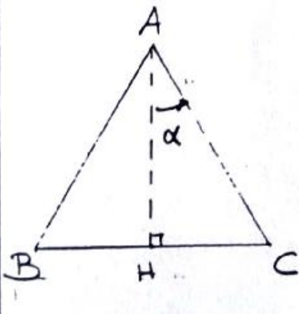
$$MM' = \frac{\|\vec{u} \cdot \vec{MP}\|}{\|\vec{u}\|}$$

3°/ Calcul d'angle

Soit ABC un triangle équilatéral

Soit $\alpha = (\vec{AC}, \vec{AH})$

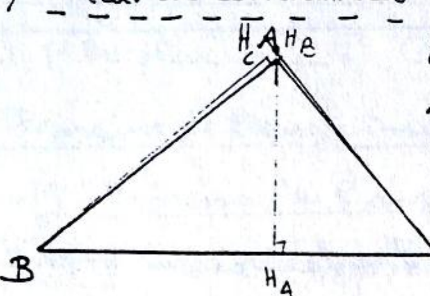
Calculer le cosinus de l'angle α



$$\cos \alpha = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AH}}{AC \cdot AH} = \frac{\overline{AH}^2}{AC \cdot AH} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \alpha = 30°$

A°/ Calcul de coordonnées barycentriques



Dans le plans affine euclidien orienté, ABC est un triangle direct, A ses angles ont des mesures comprises entre 0 et π.

$\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $\hat{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

$\hat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

Soit H_A le pied de la hauteur issue de A.

H est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

donc H_A est le barycentre de $\{(H_A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ par projection orthogonale sur (BC).

Car la projection conserve les barycentres

$$\alpha \overrightarrow{H_A H_A} + \beta \overrightarrow{H_A B} + \gamma \overrightarrow{H_A C} = \vec{0}$$

$$\beta \overrightarrow{H_A B} \cdot \overrightarrow{BC} + \gamma \overrightarrow{H_A C} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Rightarrow -\beta \overrightarrow{BH_A} \cdot \overrightarrow{BC} + \gamma \overrightarrow{CH_A} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$-\beta \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \gamma \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$-\beta\, ca \cos \hat{B} + \gamma\, ab \cos \hat{C} = 0$$

si $\begin{cases} \cos \hat{B} \neq 0 \\ \cos \hat{C} \neq 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\beta}{\frac{b}{\cos \hat{B}}} = \dfrac{\gamma}{\frac{c}{\cos \hat{C}}}$

$$\beta = \frac{b}{\cos \hat{B}} \qquad \gamma = \frac{c}{\cos \hat{C}} \qquad \alpha = \frac{a}{\cos \hat{A}}$$

or $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

donc $\begin{cases} \beta = tg\, \hat{B} \\ \gamma = tg\, \hat{C} \\ \alpha = tg\, \hat{A} \end{cases}$

Autre point de vue.

Déf : on appelle p projection orthogonale de $\mathcal{P}$ sur (Δ) l'application qui à tout point M du plan associe le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par M

M

Δ A $p(M)$

remarques. 1) tout point de Δ est tel que $p(M) = M$

2) pour tout point de $\mathcal{P}$ on a $p \circ p(M) = M$

3) $p(\mathcal{P}) = \Delta$.

Proposition : la projection orthogonale sur (Δ) est une application affine d'application linéaire associée la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}\vec{\omega})$ si $\vec{\omega}$ est un vecteur non nul de la direction de Δ.

dém : $A \in \Delta$ $\quad \overrightarrow{A\,p(M)} + \overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{AM}$ et l'application qui à $\overrightarrow{AM}$ associe $\overrightarrow{Ap(M)} = \overrightarrow{p(A)p(M)}$ est la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}\vec{\omega})$ qui est linéaire donc p est affine.

(42) Théorème de l'angle inscrit. Ensemble des points M du plan tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = a$ modulo π, ou modulo 2π. Cocyclicité. Applications.

Soit P le plan orienté. On suppose connus les angles de droites et de vecteurs.

I Théorème de l'angle inscrit:

1°/ Théorème de l'angle au centre:

Th. : Soient M, A, B distincts sur un cercle de centre O alors $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB})$ [2π]

Voir leçon 39.

Cas particulier : Si [AB] est diamètre du cercle alors $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2}$ [π].

2°/ Théorème de l'angle inscrit:

Th. : Soient M, P, A, B distincts sur un même cercle de centre O alors $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{PA}, \vec{PB})$ [π]

dém.: Tous les angles inscrits sont égaux à la moitié de l'angle au centre à π près, comme l'angle au centre ne dépend que de O, A et B, on en déduit que les angles inscrits sont égaux à π près.

Remarque: Si M, P sont sur le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ alors $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{PA}, \vec{PB})$ [2π]

Si M et P ne sont pas sur le même arc $\overset{\frown}{AB}$ alors $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{PA}, \vec{PB}) + \pi$ [2π].

Th. de la tangente.: Soient A et B deux points distincts d'un cercle de centre O. Pour tout T appartenant à la tangente en A au cercle (T≠A) on a $2(\vec{AT}, \vec{AB}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$ [2π]

II Cocyclicité et ensemble des points M du plan tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = a$ modulo π ou 2π

1°/ Cocyclicité:

Def. : Des points sont dits cocycliques s'ils appartiennent au même cercle.

Prop. : - 3 points sont toujours cocycliques ou alignés
- 4 points ne sont pas toujours cocycliques.

Th. : Soient A, B, C, D quatre points distincts tels que $(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{DA}, \vec{DB})$ [π] alors A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

2°/ Γ : ensemble des points M du plan tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = a$ modulo π ou

a/ $(\vec{MA}, \vec{MB}) = a$ [π]:

- Si $a = 0$ [π] alors Γ est la droite (AB) privée des points A et B

- Si $a \neq 0$ [π] alors Γ est le cercle 𝒞 passant par A et B tel que T la tangente en A à 𝒞 vérifie $(T, \vec{AB}) = a$ [π]

En effet: - Pour tout M distinct de A et de B, M ∈ 𝒞, du Théorème de la tangente, on a $(\vec{MA}, \vec{MB}) = (T, \vec{AB}) = a$ [π] donc 𝒞 ⊂ Γ

- Soit N ∈ Γ alors $(\vec{NA}, \vec{NB}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$ [π] donc A, M, N, B sont cocycliques donc Γ ⊂ 𝒞. D'où Γ = 𝒞

A B

A B

Si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a\ [2\pi]$

- Si $a = 0\ [2\pi]$ alors Γ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$
- Si $a = \pi\ [2\pi]$ alors Γ est le segment $[AB] \setminus \{A, B\}$
- Si $a \neq 0\ [\pi]$ alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a\ [2\pi]$ entraine $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a\ [\pi]$

alors Γ est inclus dans le cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B tel que T la tangente en A à $\mathcal{C}$ vérifie $(T, AB) = a\ [\pi]$.

Or $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a\ [\pi]$ entraine $\begin{cases} (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a\ [2\pi] \\ \text{ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (a + \pi)\ [2\pi] \end{cases}$

D'où Γ est un des 2 arcs $\overset{\frown}{AB}$, Γ est appelé <u>arc capable</u> de l'angle de mesure a, associé au bipoint (A, B).

III- Application :

1) Droites de Simson :

Soit ABC un triangle non aplati, de cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

Soit P un point du plan dont les projetés orthogonales sur les droites (BC), (CA), (AB) sont P_1, P_2, P_3.

Montrer que P_1, P_2 et P_3 sont alignés si et seulement si $P \in \mathcal{C}$.

2) Symétrique de l'orthocentre :

Soit ABC un triangle non aplati, H son orthocentre, A' le pied de la hauteur issue de A et $H' = s_{(BC)}(H)$

Montrer que H' appartient au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC.

Leçon n°44 type I

Projection orthogonale sur un plan de l'espace, projection vectorielle associée. Exemples d'effets d'une telle projection sur une configuration de l'espace.

0/ Notations - Recquis : $\mathcal{E}$ espace affine euclidien dimension 3
$\vec{\mathcal{E}}$ espace vectoriel associé
Π et $\vec{\Pi}$ un plan de $\mathcal{E}$ et sa direction
d et $\vec{d}$ une droite et sa direction.

géométrie dans l'espace : - relations entre droites, plans. Pythagore.

Thalès dans le plan

On utilisera souvent :
d est perpendiculaire en O à Π si et seulement si d est perpendiculaire en O à deux droites distinctes de Π.

I/ Projection orthogonale sur un plan Π

Proposition 1 : Soit Π un plan, M un point de $\mathcal{E}$

1°) Par M ne passe qu'un sous espace affine de direction orthogonale à $\vec{\Pi}$: c'est une droite, notée Δ_M

2°) Soit K le point de Π défini par : $\{K\} = \Delta_M \cap \Pi$:

$$\{K\} = \Delta_M \cap \Pi \iff MK = \inf_{K' \in \Pi} MK'$$

Dém : idées 1°) $\mathcal{E}$ euclidien $\Rightarrow M \oplus M^{\perp} = \mathcal{E} \Rightarrow \dim M^{\perp} = 1$
2°) Pythagore

Définition 1 L'application qui à tout point M de $\mathcal{E}$ fait correspondre le point K : $\{K\} = \Delta_M \cap \Pi$ est appelée projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur Π

notation : p_Π et $M' = p_\Pi(M)$

Remarque : i) l'ensemble des pts invariants de p_Π est Π
ii) $N \in \Pi \Rightarrow p_\Pi^{-1}(N) = \Delta_N$
l'image de tte droite $d \perp \Pi$ est son point d'intersection avec Π

iii) $p_\pi \circ p_\pi = p_\pi$

II Propriétés et 1ères conséquences vectorielles

Prop 2 : Parmi les projections sur un plan π

est caractérisé par $\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2 \quad \|\overrightarrow{A'B'}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\|$

dém. $\Rightarrow$ facile

$\Leftarrow$ on se ramène à un problème plan

$\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$, A', B', C', (π)

soit A', B', C' les projetés de A, B, C sur π parallèlement à δ, A', B', C' non alignés. Si on considère la restriction de la projection sur π parallèlement à δ au plan $(\delta_{A'}, \delta_{B'})$, c'est une projection plane qui "réduit" les distances donc $\delta \perp (A'B')$. De même $\delta \perp (B'C')$ donc δ est orthogonale à π

attention : les projections orthogonales ne conservent pas les longueurs

$(AB) \perp \pi \Rightarrow p(A)p(B) = 0$ si p projection orthogonale sur π

Prop 3 (conservation).

π plan, p_π projection ortho sur π.

(α) l'image par p_π de tte droite (AB) non perpendiculaire à π est la droite (A'B') ; l'image de [AB] est [A'B'].

conséquence (1) : $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

(β) Si (ABCD) est un parallélogramme $\Rightarrow$ (A'B'C'D') parallélogramme

conséquence : p_π conserve le parallélisme

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'D'}$

(γ) p_π conserve le barycentre d'un système fini de points

conséquence : conservation de l'intérieur d'une figure convexe.

Dém : idées (α) Projections orthogonales sur une droite dans un plan P
Thalès dans P.

(β) (γ) se déduisent de (α).

III Projection vectorielle, $\vec{p_\Pi}$, associée à la projection orthogonale p_Π

Soit Π et $\vec{\Pi}$ sa direction.

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ et $A \in \mathcal{E}$

$$\exists! B \;/\; \vec{AB} = \vec{u} \quad \text{et soit } \vec{v} = \vec{A'B'} \qquad (*)$$

D'après (2) $\vec{v}$ ne dépend pas de A

$\vec{v}$ ne dépend que de $\vec{u}$ et Π

Déf 2 : La relation $*$ fait correspondre à tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ un vecteur $\vec{v} \in \vec{\Pi}$, unique :

On appelle projection vectorielle associée à p_Π, l'application

$$\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \xrightarrow{\vec{p_\Pi}} \vec{v} \in \vec{\Pi}$$

Prop 4 :

i) $\begin{cases} \vec{p_\Pi}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{p_\Pi}(\vec{u}) + \vec{p_\Pi}(\vec{v}) \\ \vec{p_\Pi}(\lambda\vec{u}) = \lambda\,\vec{p_\Pi}(\vec{u}) \end{cases}$

ii) $\vec{p_\Pi}(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\vec{p_\Pi}(-\vec{u}) = -\vec{u}$

(iii) $\vec{p_\Pi} \circ \vec{p_\Pi} = \vec{p_\Pi}$

Prop 5 :

i) $\vec{p_\Pi}(\vec{u}) = \vec{0} \iff \vec{u}$ est normal au plan Π

(i) $\vec{p_\Pi}(\vec{u}) - \vec{u} \perp$ à $\vec{\Pi}$

ii) $\vec{p_\Pi}(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} \in \vec{\Pi}$

iii) p_Π est définie par l'image d'un point O et par $\vec{p_\Pi}$:

$$\vec{OA'} = \vec{OO'} + \vec{p_\Pi}(\vec{OA})$$

IV Applications :

1) Rabattement et affinité : Images d'un cercle

Soit $\Pi_2 \neq \Pi_1$, $\Delta = \Pi_2 \cap \Pi_1$

Π_2 non perpendiculaire à Π_1.

$M \in \Pi_2$ $\quad M' = p_{\Pi_1}(M)$

Soit (Mm) droite orthogonale à Δ, contenue dans Π_2. $\{m\} = (Mm) \cap \Delta$.

Le plan (mMM') est perpendiculaire à Π_1. $mM'M$ est un triangle rectangle en M' et $(mM') \perp \Delta$

Π

Déf 3 : On appelle rabattement de Π_2 sur Π_1, la rotation d'axe Δ qui envoie Π_2 sur Π_1.

On a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ si on a orienté Δ (ce qui permet de mesurer les angles des rotations d'axe Δ)

$mM = mM_1$

$mM' = mM_1 \cos\theta$

$\Rightarrow M'$ se déduit de M_1 par une affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport $0 < k = \cos\theta < 1$.

La projection orthogonale de Π_2 sur Π_1 est le produit du rabattement de Π_2 sur Π_1 et de l'affinité d'axe Δ de rapport $k = \cos\theta$.

tion

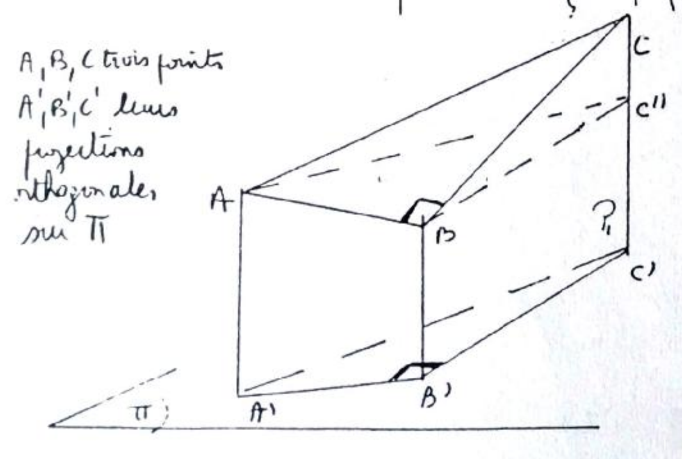
Prop 6 : Soit C un cercle de centre O, de rayon r, contenu dans Π_2.

Sa projection orthogonale sur un plan Π_1 est :

* soit un cercle de même rayon
* soit une ellipse de grand axe $2r$ de petit axe $2r\cos\theta$
* soit un segment de longueur $2r$

2ème application : Projection d'un angle droit :

Prop 7 : Un angle droit $\widehat{BAC}$ se projette orthogonalement sur Π suivant un angle droit si et seulement si l'un des côtés est parallèle à Π, l'autre n'étant pas perpendiculaire à Π.



ne de

dem
$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0\\(AB)\,//\,\Pi\\(BC)\not\perp\Pi\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{A'B'}\cdot\vec{B'C'} = (\vec{A'A}+\vec{AB}+\vec{BB'})\cdot\vec{B'C'}$$
$$= \vec{AB}\cdot\vec{B'C'} = \vec{AB}\cdot(\vec{B'B}+\vec{BC}+\vec{CC'})$$
$$= \vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A'B'}\cdot\vec{B'C'}=0\\\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0\end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \text{ ou } (BC) \;//\; \grave{a}\ \Pi$$

$\vec{A'B'}\cdot\vec{B'C'} = \vec{AB}\cdot\vec{B'C'}$

si $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$ donc $\vec{AB} \,//\, \grave{a}\ \Pi$ si $\vec{B'C'} \neq 0$ sinon $(BC) \,//\, \Pi$.



Composées de réflexions du plan fixant un point donné Invariants élémentaires : effet sur les distances, les angles,..., applications linéaires associés. Groupe des isométries fixant un point.

Pour cette leçon : on suppose connu le fait que les réflexions sont des isométries, les propriétés des réflexions. On notera O le point donné.

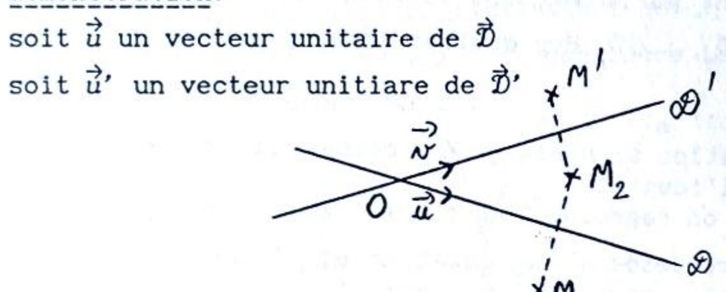
I Composée de réflexions fixant un point donné.

1/ Proposition: La composée de deux réflexions par rapport aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passant par O ($\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$) est une isométrie ayant un seul point fixe O.

démonstration:

soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{\mathcal{D}}$

soit $\vec{u}'$ un vecteur unitiare de $\vec{\mathcal{D}}'$



$s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} (M) = M'$ avec les propriétés suivantes: $(\overrightarrow{OM},\vec{u}) = (\vec{u},\overrightarrow{OM_2})$ si $M_2 = s_{\mathcal{D}}(M)$

$(\overrightarrow{OM_2},\vec{v}) = (\vec{v},\overrightarrow{OM'})$ car $M' = s_{\mathcal{D}'}(M_2)$

d'où $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\overrightarrow{OM'})$ (Chasle)

$= (\vec{u},\overrightarrow{OM_2}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\overrightarrow{OM_2},\vec{v})$

$= 2(\vec{u},\vec{v})$

or $(\vec{u},\vec{v})$ est un angle ni nul ni plat ; seul le point O est fixe.

Définition: on appelle rotation du plan, toute isométrie du plan n'admettant qu'un point fixe, ou l'identité.

On appelle centre de la rotation l'unique point fixe de cette rotation.

Proposition: Toute rotation r de centre O est le produit de deux réflexions d'axes contenant O, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

Démonstration: Voir la leçon : "Réflexions et rotations du plan...".

Corollaire: L'ensemble des rotations de centre O et l'identité muni de la composition forme un groupe commutatif.

Démonstration: . $r \circ r' = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}''}$ si $r = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $r' = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}''}$ (par la proposition précédente) avec $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ droites contenant O, donc $r \circ r' = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}''}$ qui est une rotation si $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}''$, l'identité si $\mathcal{D}' = \mathcal{D}''$.

. si $r = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ $r^{-1} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$

$r \circ r' = r' \circ r$ car si $r' \circ r(M) = r'(M') = M''$ on a

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}) = 2(\vec{u}',\vec{u}'') \\ OM' = OM'' \end{cases}$$

$r = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$

avec $\vec{u}$ élément de $\vec{\mathcal{D}}$ $\qquad r' = s_{\mathcal{D}''} \circ s_{\mathcal{D}}$

$\vec{u}'$ $\qquad \vec{\mathcal{D}}'$

$\vec{u}''$ $\qquad \vec{\mathcal{D}}''$

$r' = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}''}$ et $\vec{u}'''$ élément de $\vec{\mathcal{D}}'''$ avec $2(\vec{u}''', \vec{u}') = 2(\vec{u}, \vec{u}'')$

$r \circ r'(M) = M'''$ avec $\begin{cases} OM, OM''' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}''') = 2(\vec{u}''', \vec{u}) = 2(\vec{u}''', \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{u}) \end{cases}$

$= 2(\vec{u}, \vec{u}'') + 2(\vec{u}', \vec{u}) = 2(\vec{u}', \vec{u}'')$

On a donc $M''' = M''$ d'où $r' \circ r = r \circ r'$.

2/<u>Proposition</u>: La composée d'un nombre impair de réflexions d'axe passant par O est une réflexion d'axe passant par O, la composée d'un nombre pair de réflexions d'axe passant par O est une rotation de centre O ou l'identité

<u>démonstration</u>: Soient $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ des droites passant par O et $s_{\mathcal{D}}, \ldots, s_{\mathcal{D}_n}$ les réflexions d'axes $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$.

$s_{\mathcal{D}_1} \circ \ldots \circ s_{\mathcal{D}_n} =$
- 1 rotation si n est pair ou l'identité — comme composée de rotations car on regroupe 2 à 2 les réflexions
- la composée d'une rotation et d'une réflexion si n est impair, or $r \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} \neq s_{\mathcal{D}'}$.

<u>Conséquences</u>:

a/ toutes les composées de réflexions du plan fixant le point O sont des isométries (composées d'isométries), des applications affines (car une réflexion est une application affine, ou car une isométrie est une application affine - polycopié). Elles conservent l'alignement, l'orthogonalité.

Une réflexion transformant les angles de vecteurs en leurs opposés:

$$(\overrightarrow{s(M)s(N)}, \overrightarrow{s(P)s(Q)}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}).$$

la composée d'un nombre pair de réflexion conserve les angles, celle d'un nombre impair de réflexions les transforme en leurs opposés.

b/ <u>applications linéaires associées</u>:

L'application linéaire associée à une réflexion est une symétrie orthogonale vectorielle : soit $s_{\mathcal{D}}$ réflexion d'axe $\mathcal{D}$. Soit $\vec{\mathcal{D}}$ la direction de $\mathcal{D}$, $\vec{\mathcal{D}}'$ le supplémentaire orthogonale de $\vec{\mathcal{D}}$ dans le plan vectoriel, soit $\vec{u}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{D}}'$. Alors $s_{\mathcal{D}}(\vec{u}) = \vec{u}$, $s_{\mathcal{D}}(\vec{v}) = -\vec{v}$.

L'application linéarie associée à une rotation est la composée de deux symétries orthogonales vectorielles: c'est donc une isométrie vectorielle, qui n'admet que $\vec{0}$ comme vecteur invariant ($\vec{r}(\vec{u}) = \vec{u}$). En effet sinon r aurait une droite de points fixes, ce qui n'est pas.

II Groupe des isométries fixant un point

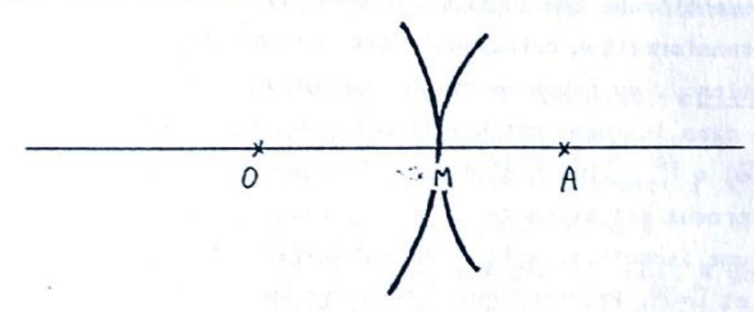
Nous avons vu dans la partie I que les isométries ayant O pour seul point fixe avec l'identité formaient un groupe commutatif. Nous allons nous intéresser aux isométries qui fixent le point O et trouver des propriétés de cet ensemble.

Théorème: Soit une isométrie f admettant O pour point fixe. Alors f est soit l'identité, soit une réflexion dont l'axe passe par O, soit une rotation de centre O.

Démonstration:

* f admet pour seul point fixe O, alors f est une rotation

* f admet deux points fixes distincts O et A, alors tout point de la droite (OA) est fixe par f: en effet on considère les cercles $\mathcal{C}(O,OM)$ et $\mathcal{C}(A,AM)$ qui sont transformés par f :



en $\mathcal{C}(f(O),OM)$ et $\mathcal{C}(f(A),AM)$ c'est à dire $\mathcal{C}(O,OM)$ et $\mathcal{C}(A,AM)$ donc $M=f(M)$.
Puis pour un point M quelconque, la médiatrice de $[Mf(M)]$ est la droite (OA):
en effet: $OM = f(O)f(M) = Of(M)$

$AM = f(A)f(M) = Af(M)$

Alors considérons $\Delta_{(OA)} \circ f$: c'est une isométrie, qui fixe O, A et tout point M du plan; c'est l'identité donc $f = \Delta_{(OA)}$.

* f admet trois points fixes non alignés: f étant une application affine, f est l'identité.

Théorème: L'ensemble des isométries du plan fixant un point O donné, est un groupe pour la composition ; ce groupe contient un sous-groupe commutatif constitué de l'identité et des rotations de centre O, les autres éléments sont les réflexions dont l'axe passe par O.

Démonstration: c'est une conséquence de I et du théorème précédent.

GROUPE DES ISOMÉTRIES DU PLAN, DÉCOMOSITION D'UNE ISOMÉTRIE EN PRODUIT DE RÉFLEXIONS. DÉPLACEMENTS, ANTIDÉPLACEMENTS. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES À PARTIR DE L'ENSEMBLE DES POINTS INVARIANTS.

* Lire la remarque sur le point de vue adopté en fin de leçon.

Pour cette leçon, on se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, et on suppose connu les réflexions, les applications affines, les applications linéaires associées. On notera $s_{\mathcal{D}}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, $r(O,\alpha)$ la rotation de centre O et d'angle α.

I Groupe des isométries du plan.

1/ Isométrie.

Définition 1. On appelle isométrie toute application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que:

$$\forall(M,N) \in \mathcal{P}^2 \quad \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Proposition 2. Toute isométrie de $\mathcal{P}$ est une application affine bijective dont l'application linéaire associée est une transformation orthogonale, et réciproquement toute application affine dont l'application linéaire associée est une transformation orthogonale est une isométrie.

Démonstration: . on rappelle qu'une application linéaire $\vec{f}$ du plan vectoriel euclidien dans lui-même est une transformation orthogonale si :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}.$$

. la réciproque est évidente.

. soit f une isométrie, soit O un point de $\mathcal{P}$. Définissons $\vec{f}$ par $\vec{f}(\vec{u})$ $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ si $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Prouvons que $\vec{f}$ conserve le produit scalaire:

soit $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.

$2\ \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \|\vec{f}(\vec{u})\|^2+\|\vec{f}(\vec{v})\|^2-\|\vec{f}(\vec{u})-\vec{f}(\vec{v})\|^2$

$= \|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2+\|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2-\|\overrightarrow{f(O)f(M)}-\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2=\|\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2$

$= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\overrightarrow{NM}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2= 2\ \vec{u}.\vec{v}$ [f est une isométrie donc $\|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2=\|\overrightarrow{OM}\|^2$, $\|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2=\|\overrightarrow{ON}\|^2$, $\|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2=\|\overrightarrow{NM}\|^2$].

On a donc: $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$. $\vec{f}$ est donc une application <u>linéaire</u> bijective. En effet, soient $\vec{u},\vec{v}$ deux éléments de $\vec{P}$, α et β deux réels et $\vec{\omega} = \vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) - \alpha\ \vec{f}(\vec{u})-\beta\ \vec{f}(\vec{v})$. $\forall\vec{t}\in\vec{P}$ $\vec{\omega}.\vec{f}(\vec{t})= \vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{f}(\vec{t})-\alpha\ \vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{t})-\beta\vec{f}(\vec{v}).\vec{f}(\vec{t})$.

$=(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{t} - \alpha\ \vec{u}.\vec{t} - \beta\ \vec{v}.\vec{t}=0$

Appliquons ceci à $\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, puis $\vec{t}=\vec{u}$ puis $\vec{t}=\vec{v}$.

On obtient $\vec{\omega}.\vec{f}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})-\alpha\ \vec{\omega}.\vec{f}(\vec{u}) - \beta\ \vec{\omega}.f(\vec{v})= 0=\vec{\omega}\ .\ \vec{\omega}$ donc $\vec{\omega}=\vec{0}$.

$\vec{f}$ est injective car $\vec{f}(\vec{u})=\vec{0} \Longrightarrow \|\vec{f}(\vec{u})\|^2=\|\vec{u}\|^2=0 \Longrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ donc $\vec{f}$ est bijective (la dimension de $\vec{P}$ est 2), donc f l'est.

Proposition 3. L'inverse d'une isométrie de $\mathcal{P}$ est une isométrie de $\mathcal{P}$.

Preuve : f isométrie de $\mathcal{P} \Rightarrow f$ est bijective $\Longrightarrow f^{-1}$ existe et vérifie:

$$\forall(M,N) \in \mathcal{P}^2 \quad \|\overrightarrow{f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N))}\| = \|\overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}\|=\|\overrightarrow{MN}\|.$$

Théorème 4. L'ensemble des isométries du plan muni de la composition est un groupe.

Preuve . partie non vide des applications de $\mathcal{P}$ dans lui-même: Id

. stable par composition élément neutre.

. stable par passage à l'inverse (proposition 3.)

Remarque: . ce groupe est l'image réciproque du groupe orthogonal par $f \to \vec{f}$.

. ce groupe contient $t_{\vec{u}}$, $s_{\mathcal{D}'}$, $r(O,\alpha)$ par exemple.

. quelques exemples de composition utiles dans la suite de la leçon.

$$* \ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'} = \begin{cases} \to r(O,\ 2(\mathcal{D},\mathcal{D}')) \text{ si } \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{O\} \\ \to \text{une translation ou } Id \text{ si } \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \ (\vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}^{\perp}) \end{cases}$$

et réciproquement.

* $t_{\vec{u}} \circ r(O,\alpha)$ est une rotation : on utilise

$$t_{\vec{u}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} \quad r(O,\alpha) = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}''} \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ r(O,\alpha) = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}''}.$$

avec $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}'' = \{O'\}$ et $2(\mathcal{D}',\mathcal{D}'') = 2(\mathcal{D},\mathcal{D}'')$ car $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'' \cap \mathcal{D} = \{O\}$.

De même $t(O,\alpha) \circ t_{\vec{u}}$ est une rotation.

2/ Théorème 5.

Les réflexions engendrent le groupe des isométries.

Démonstration:

Soit f une isométrie du plan, M un point et $f(M)$ son image. Si M est distinct de $f(M)$, on peut considérer la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[Mf(M)]$ et $s_{\mathcal{D}} \circ f(M)=M$. Donc quitte à composer f à gauche avec une réflexion on peut supposer que f admet un point fixe A.

Soit g une isométrie de $\mathcal{P}$ tel que $g(A)=A$. Soit N un point distinct de A. Si $g(N) \neq N$, on compose g à gauche par la réflexion d'axe la médiatrice de $[Ng(N)]$ et on est ramené à une isométrie admettant deux points fixes distincts, donc fixant tout point de la droite joignant ces deux points. Quitte à recomposer avec la réflexion d'axe cette droite de points fixes (on utilise le fait que pour toute isométrie h, pour tout point M de $\mathcal{P}$ les points fixes éventuels de h appartiennent à la médiatrice de $[Mh(M)]$), on est ramené à une isométrie de $\mathcal{P}$ admet tant trois points fixes non alignés deux à deux, c'est l'identité. Donc toute isométrie peut s'écrire comme la composée d'au plus trois réflexions.

II Classification des isométries à partir de l'ensemble des points fixes.

On a déjà utilisé le fait que

* f admet trois points invariants non alignés $\Rightarrow f=Id$.

* f admet deux points invariants distincts $\Rightarrow f$ est la réflexion d'axe la droite joignant ces deux points, et f admet pour seuls points invariants les points de l'axe.

* f admet un point invariant unique $\Rightarrow f$ est une rotation de centre ce point et f se décompose en produit de deux réflexions d'axe passant par le point fixe de f. (voir leçon sur les rotations).

* f n'admet pas de point invariant:

Théorème 6. Toute isométrie du plan sans point fixe qui n'est pas une translation s'écrit de manière unique comme produit commutatif d'une symétrie orthogonale $s_{\mathcal{D}}$ et d'une translation de vecteur appartenant à $\vec{D}$.

Démonstration: Soit O un point, $\vec{u} = \overrightarrow{f(O)O}$, $t_{\vec{u}} \circ f$ n'est pas l'identité car f n'est pas une translation, $t_{\vec{u}} \circ f$ n'est pas une rotation car alors $f = t_{\vec{u}} \circ r$ où r est une rotation et f est une rotation (voir exemples de composition après le théorème 4.) et a un point fixe unique, donc $t_{\vec{u}} \circ f$ admet au moins deux points fixes distincts et c'est une réflexion. $f = t_{-\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$. On décompose alors le vecteur $-\vec{u}$ en $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ appartenant à $\vec{D}$, $\vec{u}_2$ appartenant à $\vec{D}^{\perp}$.

$$t_{-\vec{u}} = t_{\vec{u}_1} \circ t_{\vec{u}_2}$$

$t_{\vec{u}_2} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ (en utilisant les exemples de composition) avec $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$ d'où

$f = t_{\vec{u}_1} \circ s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} = t_{\vec{u}_1} \circ s_{\mathcal{D}'}$.

Il est facile de vérifier que $t_{\vec{u}_1} \circ s_{\mathcal{D}'} = s_{\mathcal{D}'} \circ t_{\vec{u}_1}$ car $\vec{u}_1 \in \vec{D}'$.

Unicité: Si $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$.

$f \circ f = t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$ d'où l'unicité de $\vec{u}$ (et la façon de le trouver) et donc celle de $\mathcal{D}$.

On dit alors que f est une réflexion glissée.

Récapitulation:

* tout le plan est fixe: f est l'identité
* un point fixe: f est une rotation
* une droite de points fixe: f est une réflexion
* pas de point fixe: f est une translation ou une réflexion glissée.

Puis faire décomposition de ...

III Déplacements, antidéplacements.

On a vu que les réflexions engendrent le groupe des isométries, on peut même écrire toute isométrie comme la composée d'au plus trois réflexions. Nous allons préciser tout ceci:

Proposition 7. La composé d'un nombre pair de réflexions est une rotation ou une translation et l'ensemble des rotations et translations muni de la composition est un sous-groupe du groupe des isométries.

Preuve. On regroupe les réflexions deux à deux, on sait que la composée de deux rotations est une rotation ou une translation:

$r(O,\alpha) \circ r(O',\beta) = s_{\mathcal{D}} \circ s_{(OO')} \circ s_{(OO')} \circ s_{\mathcal{D}'} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ et si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ est une translation, si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ est une rotation.

La composée de deux translations est une translation (évident), d'une translation et d'une rotation, une rotation (déjà vu). Le fait que l'on obtienne un groupe et facile. Tout élément de ce groupe s'écrit comme composé de deux réflexions.

Proposition 8. Le composé d'un nombre impair de réflexion est une réflexion ou une réflexion glissée qui s'écrit comme composé de trois réflexions.

Démonstration: En conservant la réflexion du produit et en utilisant la proposition 7. on doit étudier: $t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $r \circ s_{\mathcal{D}}$

Le théorème 6. donne $t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$: réflexion ($\vec{u} \perp \vec{D}$) ou réflexion glissée. Pour $r \circ s_{\mathcal{D}}$: $r = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}''}$ avec $\mathcal{D}'' \| \mathcal{D}$ d'où $r \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}'} \circ t_{V}$ et on raisonne comme dans le théorème 6.

Définition 9.: On appelle déplacement toute isométrie composée d'un nombre pair de réflexions, antidéplacement toute isométrie composée d'un nombre impair de réflexions.

Proposition 10.: Les déplacements sont les rotations et les translations, les antidéplacements sont les réflexions et les réflexions glissées.

Preuve: C'est a conséquence des propositions 7. et 8.

Remarques:

* une réflexion transformant tout angle de vecteurs en son opposé, les déplacements conservent les angles de vecteurs, les antidéplacements les transforment en leurs opposés.
* l'application linéaire associés à une réflexion est de déterminant -1(dans une base orthonormée elle a pour matrice)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1)$$

donc les déplacements correspondent au noyau de $f \longrightarrow det\, \vec{f}$

et les antidéplacements sont caractérisés par : $det\, \vec{f} = -1$.

Commentaires sur cette leçon:

Dans la première partie de la leçon, il faut démontrer qu'une isométrie de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est bijective. Le point de vue adopté est celui de montrer qu'une isométrie est affine. On peut aussi démontrer directement que f est bijective, ceci ne modifie pas le reste de la leçon: il suffit de supprimer la première remarque après le théorème 4. et la dernière remarque après la proposition 9.

Démonstration du fait que f isométrie de $\mathcal{P}$ entraîne f bijective:

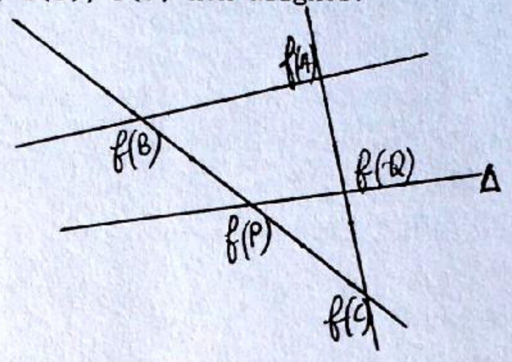
* on remarque que f est injective car:

$f(A)=f(B) \Rightarrow \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Rightarrow A=B$.

* on en conclut que l'image de f contient au moins deux points distincts $f(A) \neq f(B)$ (on prend $A \neq B$) donc que l'image de f contient la droite $(f(A)f(B))$ car:

- le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\|MA\|+\|MB\|=\|MA\|$, donc $\|\overrightarrow{f(M)f(A)}\| + \|\overrightarrow{f(M)f(B)}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(B)}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|$ donc $f(M)$ appartient au segment $[AB]$ et tout point de ce segment est atteint ($\|\overrightarrow{f(M)f(A)}\| = \|\overrightarrow{MA}\|$)
- la demi-droite issue de A, ne contenant pas B et portée par (AB) est l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA}\| + \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ donc $\|\overrightarrow{f(M)f(A)}\| + \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(B)}\|$ donc $f(M)$ appartient à la demi-droite issue de $f(A)$, ne contenant pas $f(B)$ et portée par $(f(A)f(B))$, de plus tout point de cette demi-droite est atteint ($\|\overrightarrow{f(M)f(A)}\|=\|\overrightarrow{MA}\|$).
- on raisonne de même pour l'autre demi-droite.

* on remarque que l'image de f contient trois points non aligné car si A,B,C sont trois points non alignés, on a une inégalité triangulaire stricte du type $\|\overrightarrow{AC}\|<\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|$ par exemple donc $\|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|<\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|+\|\overrightarrow{f(B)f(C)}\|$ donc $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ non alignés.



L'image de f contient alors les droites $(f(A)f(B))$, $(f(B)f(C))$, $(f(C)f(A))$ et comme une droite Δ du plan coupe au moins deux de ces droites en $f(P)$ et $f(Q)$, la droite Δ appartient à l'image de f. f est donc sujective.

leçon n° 53.

Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone ...)

supposé connu : le groupe des isométries du plan (leçon n°49) noté $I(\mathcal{P})$

$\mathcal{P}$ = plan affine euclidien orienté.

I. Polygone régulier.

définition 1 : $P_n = \{M_0, M_1, \dots, M_{n-1} \mid n \geqslant 3\}$ est appelé polygone régulier de centre O à n sommets si :
$M_0, \dots, M_{n-1}$ sont n points distincts de $\mathcal{P}$ situés sur un cercle de centre O tels que $M_0M_1 = M_iM_{i+1}$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ avec la convention $M_n = M_0$.

c'est ici où l'a réintroduit "les n pts sont distincts 2 à 2"

définition 2 : $P_n = \{M_0, \dots, M_{n-1} \mid n \geqslant 3\}$ est un polygone régulier à n sommets si :
$\exists (O, \theta) \in \mathcal{P} \times]-\pi, \pi[$ et $\theta \neq 0$ vérifiant $M_{i+1} = r(M_i)$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$
où r est la rotation de centre O, d'angle $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$
avec la convention $M_n = M_0$.
O est alors appelé centre du polygone.

proposition : définition 1 $\Longleftrightarrow$ définition 2.

dém : $\Leftarrow$) immédiat : $M_{i+1} = r(M_i)$ avec r = rotation de centre O d'angle $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$ donc $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont n points ~~distincts~~ (car $\theta \neq 0$) situés sur le cercle de centre O et $M_0M_1 = M_iM_{i+1}$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$

(faux) Ils ne sont pas nécessairement distincts 2 à 2
prendre $M_0M_1M_2$ tri équilatéral
et $P_6 = M_0M_1M_2M_0M_1M_2$

$\Rightarrow$) Hypo : $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont n points distincts de $\mathcal{P}$ situés sur un cercle de centre O / $M_0M_1 = M_iM_{i+1}$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$

soit r la rotation de centre O, d'angle $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$ (8)

- alors $M_0M_1 = M_1M_2 \Rightarrow (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \pm\theta\ (2\pi)$
Or $M_2 \neq M_0$ car $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont n points distincts avec $n \geq 3$ donc $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = +\theta\ (2\pi)$
donc $r(M_1) = M_2$.
- $M_1M_2 = M_2M_3 \Rightarrow (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}) = \pm\theta\ (2\pi)$
or $M_2 \neq M_3$ car $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont n points distincts (avec la convention $M_n = M_0$) donc $(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}) = +\theta\ (2\pi)$ $r(M_2) = M_3$

ainsi de proche en proche on montre que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$
$(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}}) = \theta\ (2\pi)$ donc $r(M_i) = M_{i+1}$

<u>remarque</u> $r^n(M_0) = M_0 \Rightarrow r^n = Id \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \wedge n = 1$, $1 \leq k \leq n-1$

<u>conséquence</u> : O est l'isobarycentre de $\{M_0, \dots, M_{n-1}\}$. (d'où l'unicité de O).

<u>dém</u> : soit G l'isobarycentre de $M_0, \dots M_{n-1}$
$\Rightarrow r(G)$ " " $r(M_0), \dots, r(M_{n-1})$
$= M_1, M_2, \dots, M_0$

donc $r(G) = G$ or $r \neq Id \Rightarrow r$ a 1 pt fixe unique O donc $O = G$

<u>notations</u>. soit $P_n = \{M_0, \dots, M_{n-1}\}$ polygone régulier à n sommets de centre O.
$[M_iM_{i+1}]$ = côté du polygone $0 \leq i \leq n-1$ avec la convention $M_n = M_0$.
$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$. (dans toute la suite).

II. <u>Isométries du plan conservant un polygone régulier</u>.

1°) <u>définition</u> : On dit que $f \in I(\mathcal{P})$ <u>conserve P_n</u> si $f(P_n) = P_n$.

proposition : $\forall f \in I(\mathcal{P})$ conservant P_n conserve aussi le point O.

dém : $O = \text{Isobar}\{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$$

soit $\vec{f}$ = appli. linéaire associée à f : $\vec{f}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{OM_i}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \vec{f}(\overrightarrow{OM_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{f(O)f(M_i)} = \vec{0}$$

donc $f(O) = \text{Isobar}\{f(M_0), \ldots, f(M_{n-1})\}$

comme f conserve P_n on a $\{f(M_0), \ldots, f(M_{n-1})\} = \{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$

donc $f(O) = \text{Isobar}\{M_0, \ldots, M_{n-1}\} = O$

f conserve le point O.

conséquence : toute isométrie f de $\mathcal{P}$ conservant P_n fixe au moins le point O donc f est :

- soit l'$Id_{\mathcal{P}}$
- soit une rotation de centre O
- soit une réflexion d'axe passant par O.

2°) Groupe des rotations conservant P_n.

proposition : l'ensemble des rotations conservant P_n, muni de la loi de composition, est un groupe cyclique d'ordre n, engendré par $r(O, \theta)$, on le note R_n

dém :

- Montrons que $R_n \subset \{$rotations conservant $P_n\}$

soit R_n le groupe cyclique d'ordre n engendré par $r(O,\theta)$. Les éléments de R_n sont de la forme $r(O,\theta)^k$ avec $0 \leq k \leq n-1$. ($r(O,\theta)^0 = Id_{\mathcal{P}}$)

Les éléments de R_n conservent P_n :

$\forall k \quad r(O,\theta)^k(M_i) = M_{i+k}$, avec la convention

$M_{i+n} = M_i$.

$(M_0 \xrightarrow{r} M_1 \xrightarrow{r} M_2 \xrightarrow{r} \dots M_i \xrightarrow{r} \dots M_{n-1} \xrightarrow{r} M_0)$.

- Montrons que $\{$rotations conservant $P_n\} \subset R_n$.
  C'est à dire cherchons s'il existe d'autres rotations que celles de la forme $r(O,\theta)^k$ $0 \leq k \leq n-1$ conservant P_n.
  Soit $A \in \mathcal{P}$ ($\neq O$). Supposons qu'il existe $r(A,\alpha)$ conservant P_n de centre O.

on p88, on a déjà dit que toute rotation conservant P_n devait être de centre O

~~$r(A,\alpha)$ laisse P_n et A invariants i.e $\forall M_i \in P_n$ $i \in \{0,\dots,n-1\}$ on a $r(A,\alpha)(M_i) = M_j \in P_n$ et $r(A,\alpha)(M_j) = M_k \in P_n$ donc M_i, M_j et M_k sont cocycliques sur un cercle de centre A.~~

~~D'après la proposition de la page 2 (en haut) $O = A$~~

une rotation est définie de façon unique par son centre un point et son image. Ici le centre de la rotation est O. Soit $M_0 \in P_n$. M_0 a n images possibles dans P_n, il existe donc au plus n rotations conservant P_n donc $\#\{$rotations conservant $P_n\} \leq n$
or $\# R_n = n$ donc il n'y a pas d'autres rotations que $r(O,\theta)$ conservant P_n.

3°) <u>Réflexions conservant P_n</u>.

<u>proposition 1</u>: la droite (OM_0) et la médiatrice du segment $[M_0M_1]$ sont des axes de symétrie de P_n.

<u>dém</u>:

- Montrons que (OM_0) est axe de symétrie de P_n.
  notons $r = r(O,\theta)$

ج) $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}$ on a $r^i(M_0) = M_i$

donc

$$r^{n-i}(M_0) = M_{n-i} = r^{-i}(M_n) \underset{\uparrow}{=} r^{-i}(M_0)$$

$M_n = M_0$

et $M_i = r^i(M_0) \Longleftrightarrow M_0 = r^{-i}(M_i)$

r^{-i} conserve les distances

donc $M_{n-i}M_0 = M_0M_i$

Or $OM_i = OM_{n-i}$ (M_i et M_{n-i} sont sur le cercle de centre O)

donc M_iOM_{n-i} est un triangle isocèle d'axe de symétrie la droite (OM_0) donc (OM_0) est axe de symétrie de P_n.

- Montrons que la médiatrice du segment $[M_0M_1]$ est axe de symétrie de P_n.

M_0OM_1 est un triangle isocèle ($OM_0 = OM_1$) d'axe de symétrie la médiatrice de $[M_0M_1]$

$\forall i \in \{0,\dots,n-1\}$ le triangle $r^{-i}(M_0)Or^i(M_1)$ est isocèle

or $r^{-i}(M_0) = M_{n-i}$

$r(r^i(M_0)) = r^{i+1}(M_0) = M_{i+1} = r^i(r(M_0)) = r^i(M_1)$. donc $r^i(M_1) = M_{i+1}$

Montrons que la médiatrice de $[M_0M_1]$ est axe de symétrie de ce triangle $M_{n-i}OM_{i+1}$ c'est à dire montrons que $s\circ r^i(M_1) = r^{-i}(M_0)$

avec s = symétrie / médiatrice de $[M_0M_1]$.

Or $M_1 = s(M_0) \Rightarrow s\circ r^i(M_1) = s\circ r^i\circ s(M_0) = r^{-i}(M_0)$

(car $s_\Delta \circ r \circ s_\Delta = r^{-1}$ avec s = symétrie / Δ passant par un pt O

et r = rotation de centre O

dém : $r = s_{\Delta'}\circ s_\Delta$ avec $\Delta \cap \Delta' = \{O\}$

$\Rightarrow s_\Delta\circ r\circ s_\Delta = s_\Delta\circ s_{\Delta'}\circ s_\Delta\circ s_\Delta = s_\Delta\circ s_{\Delta'} = r^{-1}$)

déjà fait pour le groupe des rotations de centre O et

donc la médiatrice de $[M_0M_1]$ est axe de symétrie de P_n.

remarque : parité de n.

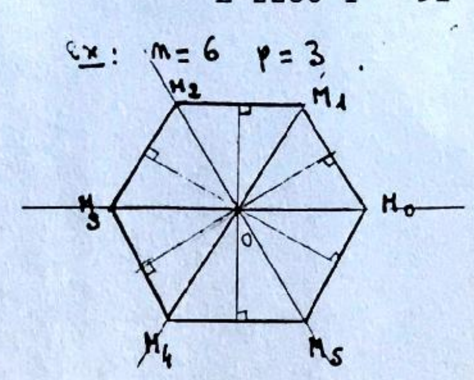
Selon la parité de n, les droites (OM_i) $0 \leq i \leq n-1$ joindront ou non 2 sommets de P_n (joindront ou non 2 sommets de P_n

a) si n pair $n = 2p$

on a alors $M_p = M_{n-p}$

et $(OM_0) = (OM_p)$

$\text{méd}\,[M_0M_1] = \text{méd}\,[M_pM_{p+1}]$

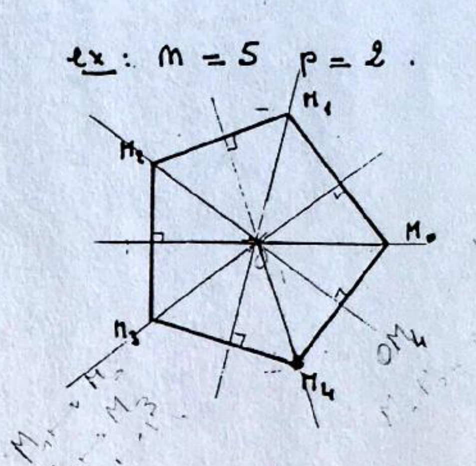


b) si n impair $n = 2p+1$.

on a alors $M_{p+1} = M_{n-p}$

et $(OM_0) = \text{méd}\,[M_pM_{p+1}]$

$(OM_{p+1}) = \text{méd}\,[M_0M_1]$



proposition 2: les seuls axes de symétries de P_n sont les droites D_i, $0 \leq i \leq n-1$, définies par:

- si $n = 2p$ $D_i = (OM_i)$ $0 \leq i \leq p-1$

  $D_j = \text{méd}\,[M_jM_{j+1}]$ $p \leq j \leq 2p-1$

- si $n = 2p+1$ $D_i = (OM_i)$ $0 \leq i \leq 2p$

donc $\forall n$, P_n admet n axes de symétries.

L'ensemble des réflexions conservant P_n sera noté S_n.

dém: • $n = 2p$.

→ M.q. $D_i = (OM_i)$ $0 \leq i \leq p-1$ est axe de symétrie de P_n.

on a $(OM_i) = r^i(OM_0)$ (car $M_i = r^i(M_0)$)

$\iff D_i = r^i(D_0)$, $0 \leq i \leq p-1$.

or $D_0 = (OM_0)$ est axe de symétrie de P_n d'après proposition 1 donc D_i est axe de symétrie de P_n, $0 \leq i \leq p-1$. (car P_n est stable par $r(O,\theta)$).

$\to$ M.q. $D_j = \text{med}\,[M_j M_{j+1}]$ $p \leq j \leq 2p-1$ est axe de symétrie de P_n.

d'après la remarque $\text{med}\,[M_0 M_1] = \text{med}\,[M_p M_{p+1}]$

$\Rightarrow$ $\text{med}\,[M_j M_{j+1}] = \text{med}\,[M_{j-p} M_{j+1-p}]$ $p \leq j \leq 2p-1$

or $M_{j-p} = r^{j-p}(M_0)$ et $M_{j+1-p} = r^{j-p}(M_1)$ $p \leq j < 2p$

comme $O \in \text{med}\,[M_j M_{j+1}]$ $p \leq j \leq 2p-1$

on a $\text{med}\,[M_j M_{j+1}] = r^{j-p}(\text{med}\,[M_0 M_1])$ $p \leq j \leq 2p-1$

or d'après la propo. 1 $\text{méd}\,[M_0 M_1]$ est axe de symétrie de P_n donc $\text{med}\,[M_j M_{j+1}]$ est axe de symétrie de P_n $p \leq j \leq 2p-1$ (car P_n est stable par $r(O,\theta)$)

• $n = 2p+1$

on a $(OM_i) = r^i(OM_0)$ $0 \leq i \leq 2p-1$

$\Leftrightarrow$ $D_i = r^i(D_0)$ $0 \leq i \leq 2p-1$.

or d'après la proposition 1 D_0 est axe de symétrie de P_n donc D_i est axe de symétrie de P_n $0 \leq i \leq 2p-1$ (car P_n est stable par $r(O,\theta)$).

- Montrons que ce sont les <u>seuls</u> axes de symétrie de P_n.

Soit Δ axe de symétrie de P_n alors on a vu que $O \in \Delta$ et Δ axe de symétrie de P_n $\Rightarrow$ $\Delta = \text{med}\,[M_0 M_i]$ $0 \leq i \leq n-1$

Soit $\alpha = (D_0, \Delta)$ pour que Δ soit $\neq$ des axes déjà trouvés il faut de $\alpha \neq k\frac{\theta}{2}\,[\pi]$.

mais $\Delta = \text{med}\,[M_0 M_i]$ et $M_i = r^i(M_0)$ $0 \leq i \leq n-1$ $(r = r(O,\theta))$ donc $\alpha = i\frac{\theta}{2}\,[\pi]$.

donc il n'existe pas d'autres axes de symétrie que les droites D_i $0 \leq i \leq n-1$ définies précédemment.

4°) Groupe des isométries conservant P_n.

proposition : l'ensemble des isométries du plan conservant P_n muni de la loi de composition est un groupe à $2n$ éléments engendré par la rotation $r = r(O, \theta)$ et par la réflexion $s_{(OM_0)}$, on le note $I(P_n)$.

dém : • groupe : immédiat

• $2n$ éléments : $\# R_n = n$ $\# S_n = n$
comme R_n et S_n sont disjoints alors $\# R_n \cup S_n = 2n$.

• générateurs de $I(P_n)$:
toutes les rotations de R_n sont engendrées par $r = r(O, \theta)$ (car R_n est un groupe cyclique).
Soit $s_\Delta \in I(P_n)$ symétrie / axe Δ. $s_\Delta \in S_n$.
alors $O \in \Delta$.
donc $s_{(OM_0)} \circ s_\Delta$ est une rotation de centre O ($(OM_0) \cap \Delta = \{$
$\Rightarrow s_{(OM_0)} \circ s_\Delta \in R_n := \{id, r, \dots, r^{n-1}\}$
donc $s_\Delta \in \{s_{(OM_0)}, r \circ s_{(OM_0)}, \dots, r^{n-1} \circ s_{(OM_0)}\}$
donc S_n est engendré par r et $s_{(OM_0)}$.
donc $I(P_n)$ est engendré par $r(O, \theta)$ et $s_{(OM_0)}$.

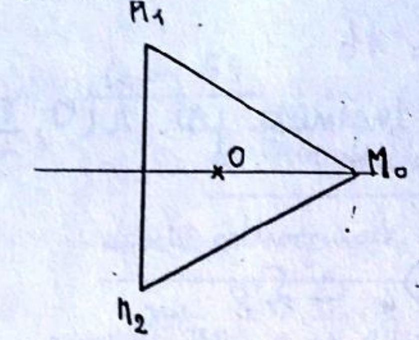
remarque : • Soit $\theta = \frac{2\pi}{n}$ alors P_n est convexe. ~~et $I(P_n)$ est~~

• $I(P_n)$ appelé groupe n_diédral et est noté D_n.

III. Exemples.

1°) triangle équilatéral.

$T = \{M_0, M_1, M_2\}$ $n = 3$ $r = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$
$M_{i+1} = r(M_i)$ $0 \leq i \leq 2$.



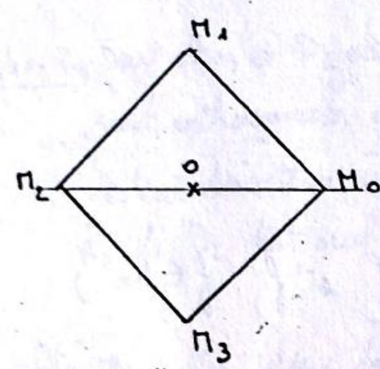
$\# \mathcal{D}_3 = 6$.

$\mathcal{D}_3$ est engendré par $r = r(O, \frac{2\pi}{3})$ et par $s_{(OM_0)}$

2°) carré.

$C = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$ $\quad n = 4 \quad r = r(O, \frac{\pi}{2})$

$M_{i+1} = r(M_i) \quad 0 \leq i \leq 3$.



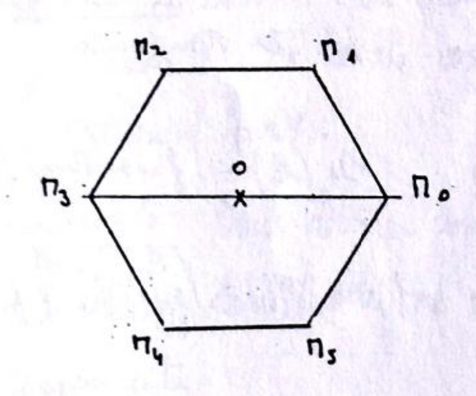
$\# \mathcal{D}_4 = 8$.

$\mathcal{D}_4$ engendré par $r = r(O, \frac{\pi}{2})$ et $s_{(OM_0)}$

3°) hexagone.

$H = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ $\quad n = 6 \quad r = r(O, \frac{\pi}{3})$

$M_{i+1} = r(M_i) \quad 0 \leq i \leq 5$.



$\# \mathcal{D}_6 = 12$.

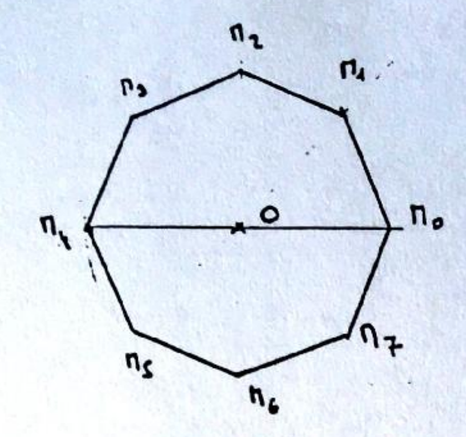
$\mathcal{D}_6$ est engendré par $r = r(O, \frac{\pi}{3})$ et $s_{(OM_0)}$.

$\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{D}_6$.

4°) octogone.

$\Omega = \{M_0, M_1, \ldots, M_7\}$ $\quad n = 8 \quad r = (O, \frac{\pi}{4})$

$M_{i+1} = r(M_i) \quad 0 \leq i \leq 7$.



$\# D_8 = 16$.

D_8 est engendré par $r(O, \frac{\pi}{4})$ et $s(OM_0)$.

$$D_4 \subset D_8$$

questions à poser

1) est-ce surprenant d'avoir

$$\# S_n = \# R_n \quad ?$$

non car si $s \in \mathcal{S}_n$ fixée

$s' \in \mathcal{S}_n$

$\Rightarrow s_o s' \in R_n$

donc $s' \in \{ s^{-1} f, f \in R_n \}$

$$\mathcal{S}_n \subset \{ s^{-1} f, f \in R_n \}$$

l'inclusion inverse est évidente

$\Rightarrow$ si $S_n \neq \emptyset$ et le groupe fini $\rightarrow$ cardinal pair

2) peut-on avoir $S_n = \emptyset$ pour un ensemble fini ?

ex parallélogramme qui est ni un carré, ni un losange, ni un rectangle

groupe des isom : id et sym/centre

3) $\mathcal{A}$ partie finie du plan $\quad Is(\mathcal{A}) = \{ f$ isométrie, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \}$

$\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_n\}$

alors $Is(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}_n \qquad f \rightarrow \varphi(f) = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ f(A_1) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$

φ homomorphisme de groupes

prop si $\mathcal{A}$ contient 1 repère du plan (i.e. 3 pts non alignés) alors $\boxed{\varphi \text{ est injectif}}$ et $Is(\mathcal{A})$ est fini

dem 2 isométries qui coïncident sur 1 repère st égales alors $Is(\mathcal{A}) \simeq \varphi(Is(\mathcal{A}))$ ss groupe de $\mathcal{S}_n$.

Leçon 54 :

Orthogonalité dans l'espace ; droites orthogonales ; droite orthogonale à un plan ; plans perpendiculaires ; applications

Le parallélisme a été étudié (entre plans, droites, droites et plans).
Le produit scalaire dans l'espace est connu, et noté $\vec{u}.\vec{v}$.

Définition 1 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

I Droites orthogonales

Définition 2 : Deux droites D_1 et D_2 sont orthogonales si leurs directions $\vec{D_1}$ et $\vec{D_2}$ sont orthogonales, ce qui signifie que le produit scalaire $\vec{u_1}.\vec{u_2}$ d'un vecteur directeur $\vec{u_1}$ arbitraire de D_1 et d'un vecteur directeur arbitraire $\vec{u_2}$ de D_2 est nul.

Propriété 3. Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

La réciproque est vraie, comme il résultera de la proposition 12.

Proposition 4 Soit P un plan, A un point de P, D une droite incluse dans P. Il existe une et une seule droite de P orthogonale à D passant par A.

Remarque 5 Deux droites coplanaires et orthogonales sont concourantes.
En effet ces deux droites ne sont pas parallèles, et étant coplanaires, sont concourantes.

Proposition 6 Deux droites d'un plan P orthogonales à une même droite de P sont parallèles.
(Utiliser la proposition 4).

II Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Définition 7. Une droite D est orthogonale à un plan P si et seulement si $\vec{D} \perp \vec{P}$, c'est à dire qu'un vecteur directeur arbitraire de D est orthogonal à tout vecteur de P. On écrit $D \perp P$.

Remarque : ceci est équivalent à $\vec{D}^{\perp} = \vec{P}$, ou encore $\vec{P}^{\perp} = \vec{D}$.

Propriété 8. $D \perp P \implies D \cap P$ est exactement un point.

En effet $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$. La droite D n'est pas parallèle à P, donc la coupe en un point unique.

Proposition 9. Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Théorème 10. Si D est orthogonale à P, D est orthogonale à toute droite de P.

Réciproquement, si D est orthogonale à deux droites sécantes de P, D est orthogonale à P.

Proposition 11 Il existe une droite unique contenant un point donné et orthogonale à un plan donné.

Il existe un plan unique contenant un point donné et orthogonal à une droite donnée.

Proposition 12 Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

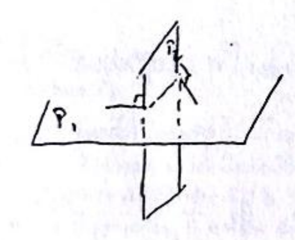
Remarque : Les propositions 4 et 11 peuvent servir à définir la projection orthogonale sur une droite ou un plan.

III Plans perpendiculaires.

Définition 13 Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à toute droite orthogonale à l'autre. On écrit $P_1 \perp P_2$.

La définition 13 signifie en langage vectoriel : $\vec{P_1}^{\perp} \perp \vec{P_2}^{\perp}$.

Il en résulte que deux plans perpendiculaires ne sont pas parallèles, donc sont sécants selon une droite



Proposition 14 Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.
Réciproquement, si une droite orthogonale à un plan P_1 est parallèle à un plan P_2, alors P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

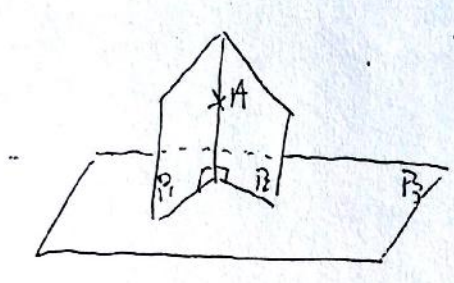
Proposition 15 $P_1 \perp P_2$. Toute droite orthogonale à P_2 contenant un point de P_1 est incluse dans P_1.

[En effet : $P_1 \perp P_2 \Rightarrow$ Une droite orthogonale à P_2 est parallèle à P_1 (prop. 14)]

Proposition 16 Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

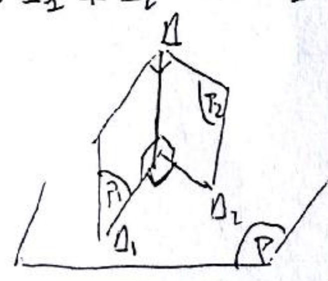
On a quelques autres propriétés des plans orthogonaux :

Proposition 17 Soient P_1 et P_2 deux plans non parallèles perpendiculaires à un plan P_3. Alors la droite $P_1 \cap P_2$ est perpendiculaire à P_3.



preuve : $\Delta = P_1 \cap P_2$. Soit $A \in \Delta$.
La droite par A orthogonale à P_3 est dans P_1 et P_2 (prop 15) donc est égale à Δ.

Proposition 18 Soient P_1 et P_2 deux plans perpendiculaires, et $\Delta = P_1 \cap P_2$.
Tout plan P orthogonal à Δ coupe P_1 et P_2 selon deux droites Δ_1 et Δ_2, et : $\Delta_1 \perp \Delta_2$ et $\Delta_1 \cap \Delta_2 \in \Delta$.



preuve : $P_1 \perp P$ (prop 16). De même $P_2 \perp P$.
Donc $\Delta_1 \perp P_2$ (prop 17 appliquée à P, P_1 orthogonaux à P_2) De même $\Delta_2 \perp P_1$. Donc $\Delta_1 \perp \Delta_2$, et étant coplanaires, ces droites se coupent, forcément sur Δ.

Cette proposition est utile pour ramener l'étude des rotations de l'espace au cas des rotations planes.

Proposition 19. Soit P un plan, D une droite non orthogonale à P.
Il existe un plan unique contenant D orthogonal à P.

[Il est dirigé par $\mathbb{R}\vec{D} \oplus \mathbb{R}\vec{P}^{\perp}$]

IV Applications

1) Existence de la perpendiculaire commune à deux droites D et D' non coplanaires.

Soit A un point de D, D'_1 la parallèle à D' par A. Δ la droite passant par A orthogonale au plan (D, D'_1). P est le plan (D, Δ).

Soit de même A' un point D', D_1 la parallèle à D par A', Δ' la droite passant par A' orthogonale au plan (D', D_1), et P' le plan (D', Δ').

$\vec{\Delta'} = \vec{\Delta}$ et $\vec{D} \neq \vec{D'}$, donc P n'est pas parallèle à P'. $P \cap P'$ est une droite de direction $\vec{\Delta} = \vec{\Delta'}$, donc orthogonale à D et D', et qui coupe D et D' [car incluse dans P et P'].

Ce qui précède marche encore si D et D' sont coplanaires, mais non parallèles.

2) Tétraèdre orthocentrique.

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires appartenant à l'espace affine euclidien E_3.

1° Démontrer que : $\vec{AB}.\vec{CD} + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC} = 0$.

En déduire que, si les deux droites de deux des trois paires :

{ droite AB, droite CD }, { droite AC, droite DB }, { droite AD, droite BC }

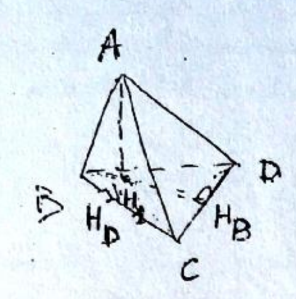
sont orthogonales, il en est de même des deux droites de la troisième paire.

2° Démontrer que, si les deux droites de chacune des trois paires de la question 1° sont orthogonales, la projection orthogonale A' du point A sur le plan BCD est l'orthocentre du triangle BCD.
Étudier la réciproque.

3° On suppose encore que les deux droites de chacune des trois paires de la question 1° sont orthogonales. On désigne : par Δ_A la droite contenant le point A et orthogonale au plan BCD, par Δ_B la droite contenant le point B et orthogonale au plan CDA, par Δ_C la droite contenant le point C et orthogonale au plan DAB, par Δ_D la droite contenant le point D et orthogonale au plan ABC.
Démontrer que les droites Δ_A, Δ_B, Δ_C et Δ_D sont concourantes.

On démontre ainsi que si les hypothèses de 1) sont vérifiées les quatre droites Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D définies en 3) sont concourantes en un point H.

Cet énoncé repose sur l'utilisation du produit scalaire. Pour rester plus dans l'esprit de la leçon, il est préférable de supprimer l'indication de la 1ère question.



$BH_B \perp CD$, $DH_D \perp BC$. $CH_C \perp BD$.

H_1 orthocentre de BCD.

2/ Supposons $AB \perp CD$ et $AC \perp DB$. Alors $\begin{cases} CD \perp (BH_BA) \\ BD \perp (AH_CC) \end{cases}$

d'où, puisque $(BH_BA) \cap (CH_CA) = (AH)$, $(AH) \perp (BCD)$ (*). Donc (BC) est perpendiculaire à (DH_1) et (AH_1) ; donc $(BC) \perp (AD)$, et $H_1 = A'$ (*).

3/ $(DC) \perp (ABH_B) \Rightarrow (AH_B) \perp (DC)$: H_B est le pied de la hauteur issue de A dans ADC. De même que $A' \in (BH_D)$, on a donc $B' = \Delta_B \cap (AH_B)$. Les droites Δ_A et Δ_B sont donc coplanaires, et, étant non parallèles, se coupent en H. Par raison de symétrie, ce point H est aussi sur Δ_C et Δ_D. D'où 3/.

Leçon 58. Quelques remarques.

<u>Symétries du tétraèdre régulier</u>. Soit $\mathcal{J}(T)$ le groupe des isométries du tétraèdre régulier. On va prouver que $\mathcal{J}(T)$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$. On sait que $\mathcal{J}(T)$ a au plus $4! = 24$ éléments et que, le centre de gravité O est stable.

. <u>Recherche de $\mathcal{J}(T)^+$, et de $\mathcal{J}(T)$</u>.

Il est clair que $\mathcal{J}(T)^+$ contient les rotations d'axes les hauteurs et d'angles $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Id, et les 1/2 - tours par rapport aux droites joignant les milieux. Les arêtes opposées, soit : $4 \times 2+1+3 = 12$ éléments, dont <u>3 1/2 tours</u>.

Donc, soit $\mathcal{J}(T) \setminus \mathcal{J}(T)^+ = \emptyset$, soit on a déterminé tout $\mathcal{J}(T)^+$.

Or les symétries par rapport aux plans médiateurs des arêtes sont dans $\mathcal{J}(T)^- = \mathcal{J}(T) \setminus \mathcal{J}(T)^+$

Il y en y a 6.

Donc : $\mathcal{J}(T) = \mathcal{J}(T)^+ \cup \sigma\, \mathcal{J}(T)^+$ a 24 éléments.

Quelles sont les symétries plans de $\mathcal{J}(T)$? Une telle symétrie σ change une face en une face. Elle ne peut conserver une face point par point donc elle en échange 2 :

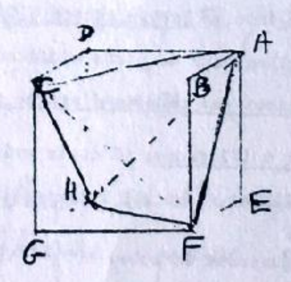
<u>σ est donc une des 6 symétries trouvées précédemment</u>.

Les 6 autres éléments de $\mathcal{J}(T)^-$ ne sont pas des symétries.

. <u>Symétries du tétraèdre régulier</u> :

3 1/2 tours et 6 symétries plans décrits précédemment.

<u>étermination des symétries du cube à partir de la connaissance des isométries du tétraèdre régulier</u>.



Au cube $\mathcal{C}$ = ABCDEFGH sont associés 2 tétraèdres réguliers T_1 = AC FH et BEGD = T_2 dont les arêtes sont les diagonales des faces du cube. Soit $\mathcal{J}(C)$ le groupe des isométries du cube. Soit O le centre du cube, et σ_o la symétrie centrale par rapport à O. $\sigma_o \in \mathcal{J}(C)^-$. Une isométrie conserve les longueurs, donc une isométrie conservant $\mathcal{C}$ échange T_1 et T_2, ou bien conserve T_1 et T_2. σ_o échange T_1 et T_2.

<u>LEMME 1</u> : Une isométrie conservant T_1 conserve $\mathcal{C}$.

Soit f une telle isométrie, et $g = f \circ \sigma_o = \sigma_o \circ f$.

$g = f \circ \sigma_o : T_2 \to T_1$. $g = \sigma_o \circ f : T_1 \to T_2$. Donc $g \in \mathcal{J}(\mathcal{C})$, et $f \in \mathcal{J}(\mathcal{C})$.

PROPOSITION : $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ a 48 éléments, $\mathcal{J}(\mathcal{C}) = \mathcal{J}(T_1) \cup \sigma_o \mathcal{J}(T_1)$.

A tout élément f de $\mathcal{J}(T_1)$, on associe 2 éléments f et $\sigma_o \circ f$ de $\mathcal{J}(\mathcal{C})$. Tous les éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ ainsi obtenus sont distincts (le seul cas non trivial est $f_1 = \sigma_o \circ f_2$ avec f_1 et f_2 dans $\mathcal{J}(T_1)$: ceci impossible car f_1 converve T_1, $\sigma_o \circ f_2$ échange T_1 et T_2). On a obtenu tous les éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ d'après la remarque précédent le lemme 1.

($\mathcal{J}(\mathcal{C})$ est en fait le produit direct $\mathcal{J}(T_1) \times Z/2Z$).

Application : symétries du cube.

. Symétries planes.

. Symétries planes de $\mathcal{J}(T_1)$: par rapport aux plans contenant les arêtes opposées de $\mathcal{C}$: 6 symétries planes de ce type.

. Cherchons f dans $\mathcal{J}(T_1)$ telle que $\sigma_o \circ f$ soit une symétrie plane. f est un déplacement, et nécessairement un demi-tour. Dans ce cas $\sigma_o \circ f$ est la symétrie par rapport au plan passant par O et orthogonal à l'axe du 1/2 tour. A partir des 3 1/2 tours de $\mathcal{J}(T_1)$, on obtient les symétries par rapport aux plans médiateurs des 3 quadraplets d'arêtes parallèles.

On a ainsi toutes les symétries planes.

. 1/2 tours conservant le cube.

. 1/2 tours de $\mathcal{J}(T_1)$: axes joignant les centres des faces parallèles (3 1/2 tours de ce type).

. $\sigma_o \circ f$ est un 1/2 tour (pour f dans $\mathcal{J}(T_1)$) si et seulement si f est une symétrie plane : donc on trouve encore 6 1/2 tours conservant $\mathcal{C}$, dont les axes passent par O et sont orthogonaux au plans médiateurs des arêtes de T_1, donc sont les droites joignant les milieux des couples d'arêtes parallèles non cofaciales.

En tout 9 1/2 tours; (C'était prévisible, il y a bijection entre plans et axes de symétries, ceux-ci étant 2 à 2 perpendiculaires en O).

. σ_o conserve le cube.

En tout 19 symétries.

Exemples de représentations paramétriques des coniques ; construction géométrique de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse et une hyperbole. (64)

connu : définitions équivalentes (par équation réduite, par foyers-directrices, bifocale) ; courbes paramétrées

- dans II ne figurent pas la construction de la tangente de l'ellipse image d'un cercle, de la tangente de l'hyperbole rapportée aux asymptotes

I Représentations paramétriques.

On traitera successivement chaque type de conique.

→ 1) Parabole ensemble Γ des points M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifiant $y = ax^2$ $a > 0$.

représentation paramétrique : $t \to M(t)$ $\quad x(t) = t$, $\quad y(t) = at^2$ $\quad a \in \mathbb{R}$

avec $t \to M(t)$ application bijective de $\mathbb{R}$ sur la parabole.

conséquence : $\forall t \quad \dfrac{d\,\vec{OM}}{dt} \neq \vec{0}$ donc en tout point de la parabole, existence d'une tangente et d'une normale en tout point de Γ.

→ 2) Ellipse : ensemble ℰ des points M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifiant $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad 0 < b \leq a$

représentation paramétrique : de manière évidente, dans ce repère

$t \longrightarrow M(t)$ $\quad x(t) = a\cos t$, $\quad y(t) = b\sin t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

(qui provient de celle du cercle dont l'ellipse est l'image par affinité)

(si on veut une représentation paramétrique propre c'est à dire avec bijection d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans ℰ il faut prendre $t \in]-\pi, \pi]$)

conséquence : la même en ce qui concerne tangente et normale

si pour $t \in]-\pi, \pi[$ on pose $u = \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$ et un paramétrage de ℰ privée du point $(-a, 0)$ qui exprime x et y comme fractions rationnelles en u :

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b\,\dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

3) Hyperbole : ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

d'où pour $M \in \mathcal{H}$ $\quad x_M \geq 0 \quad x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$

$x_M \leq 0 \quad x = -a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$

d'où un paramétrage de $\mathcal{H}$:

$\mathcal{H} \cap \{M, x > 0\}$: $t \to M(t)$ $\quad \begin{cases} x(t) = a\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}} \\ y(t) = t \end{cases}$

$\mathcal{H} \cap \{M, x < 0\}$: $t \to M(t)$ $\quad \begin{cases} x(t) = -a\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}} \\ y(t) = -t \end{cases}$

- On peut proposer de même : $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos\theta} \\ y = b \operatorname{tg}\theta \end{cases}$ $\quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

et en posant $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ on obtient : $\begin{cases} x = a\,\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\,\frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$ $\quad t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

- On peut encore proposer $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ qui ressemble énormément à la paramétrisation habituelle de l'ellipse $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

On peut encore donner la représentation paramétrique obtenue en coupant $\mathcal{H}$ par les parallèles à une asymptote $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t\right)$ d'où

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Ou bien simplement celle obtenue : $y = \frac{1}{x}$ $\quad x \in \mathbb{R}^*$ lorsque le repère est rapporté aux asymptotes.

Conséquence : en tout point de $\mathcal{H}$ on a $\frac{d\vec{OM}}{dt} \neq \vec{0}$ donc existence d'une tangente et d'une normale.

Remarque : Il n'existe aucune représentation paramétrique propre de $\mathcal{H}$ toute entière de la forme $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\quad t \in I$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I.

(on aurait alors un point de $\mathcal{H}$ sur l'axe de symétrie orthogonale ne coupant pas $\mathcal{H}$).

II Construction géométrique de la tangente et de la normale.

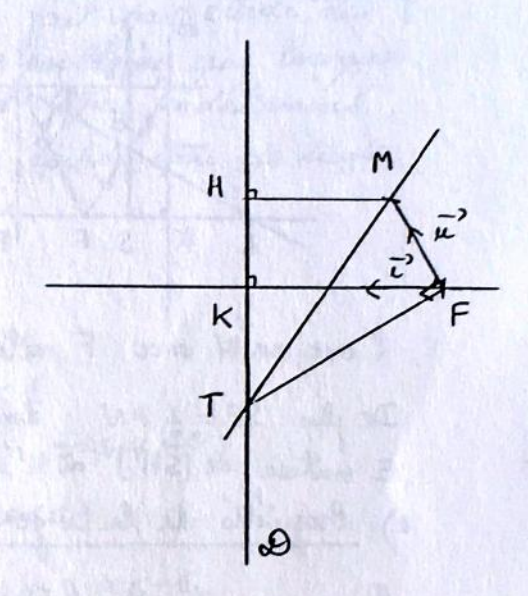
1) Propriétés de la tangente en un point M d'une conique définie par foyer et directrice :

Soit $\mathcal{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

$\{M,\ MF/d(M,\mathcal{D}) = e\}$ est une conique $\mathcal{C}$ (hyperbole si $e>1$, parabole si $e=1$, ellipse si $e<1$)

Proposition: Si la tangente au point M de $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{D}$ en T alors les droites (FM) et (MT) sont orthogonales.

remarque : si $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou une ellipse, M est donc différent des sommets du grand axe ; si $\mathcal{C}$ est une parabole M est différent du sommet.



démonstration:

soit H la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$, K la projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$, $\vec{i}$ le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{FK}}{FK}$, $\vec{u}$ le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{FM}$. Pour montrer ce résultat, on va considérer la partie de la conique située dans le demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ et contenant F (c'est toute la parabole, ou toute l'ellipse, ou une branche de l'hyperbole, pour l'autre branche pour le calcul de MH faire attention aux signes)

$MH = \overrightarrow{MH}.\vec{i} = \overrightarrow{MF}.\vec{i} + \overrightarrow{FH}\,\vec{i}$

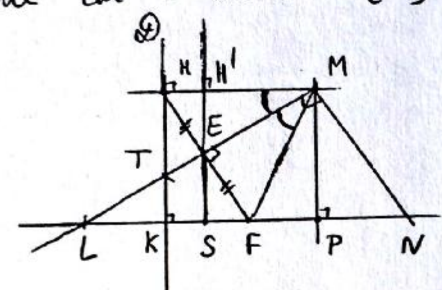
$MF = e\,MH \Rightarrow$ en dérivant,

$$\frac{dMF}{dt} = e\,\frac{dMH}{dt} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}.\vec{u} = e\,\frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}.\vec{i} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}.(\vec{u}+e\vec{i})=0$$

d'où $\overrightarrow{FT}.\vec{u} = \overrightarrow{FM}.\vec{u} + \overrightarrow{MT}.\vec{u} = FM + \overrightarrow{MT}.(-e\vec{i})$ car $\overrightarrow{MT}$ colinéaire à $\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dt}$ d'où $\overrightarrow{FT}.\vec{u} = FM - e\,\overrightarrow{MT}.\vec{i} = FM - e\,\overrightarrow{MH}.\vec{i} = FM - eMH = 0.$

<u>cas particulier</u> : si $\mathcal{E}$ est une parabole, on en déduit que les triangles rectangles MHT et MFT sont égaux donc (MT) est la médiatrice de [HF], la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MF})$ et donc la normale en M à la parabole est la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MF})$; on retrouve la propriété mirifique de la parabole.

De plus si (MT) coupe l'axe de la parabole en L, le quadrilatère HMFL est un losange : il suffit de montrer que [ML] et [HF] ont même milieu E (car $(ML) \perp (HF)$). E se projette sur (FK) en S sommet de la parabole car E milieu de [HF] entraîne S milieu de [KF]



d'où $2\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{PM}$

$\Rightarrow$ l'homothétie de centre L et rapport 2 envoie S sur P et E sur M donc E milieu de [LM]

donc la normale en M à la parabole coupe l'axe en N avec F milieu de [LN] d'où $LF = \boxed{FM = FN}$

De plus $SF = \frac{1}{2} PN$ donc $\boxed{KF = PN}$. On a aussi : $(MN) \parallel (FH)$ et E milieu de [SH'] où H' est la projection de M sur la tangente au sommet.

2) <u>Propriétés de la tangente et de la normale en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole.</u>

<u>Propriété</u> : Soit une ellipse $\mathcal{E}$ ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ où F et F' sont deux points distincts et $2a$ un réel positif supérieur à FF'. Alors la tangente en M à $\mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$, la normale en M est la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

$MF + MF' = 2a$ d'où si $\vec{u} = \frac{1}{FM}\overrightarrow{FM}$ $\quad \vec{v} = \frac{1}{F'M}\overrightarrow{F'M}$

$$\vec{u} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

Même propriété pour l'hyperbole avec $MF - MF' = 2a$ ou $MF' - MF = 2a$ suivant la branche considérée.

(67) Étude des suites de terme général a^n, n^a, $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaisons de suites aux suites précédentes.

(i) • On n'oubliera pas de démontrer rapidement tous les résultats classiques suivants :

- $\lim \ln(n) = +\infty$ [voir 121] ;
- a^n n'a pas de limite si $a \leq -1$ [suite alternée]

$$\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1<a<1 \\ 1 & \text{si } a=1 \\ +\infty & \text{si } a>1 \end{cases} \qquad \lim n^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a<0 \\ 1 & \text{si } a=0 \\ +\infty & \text{si } a>0 \end{cases}$$

(ii) L'étude des croissances comparées se fait par étude des limites des quotients. Elle ne pose problème que lorsque l'on se trouve face à une forme de type indéterminé, soit donc ici "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{+\infty}{+\infty}$". On évitera donc de traiter longuement tout autre cas !

(iii) On établira alors :

- $$\lim \frac{\ln n}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } |a|>1 \\ +\infty & \text{si } 0<a\leq 1 \end{cases}$$
  cette limite n'existant pas si $-1\leq a<0$.
- $$\lim \frac{a^n}{n^a} = \begin{cases} 0 & \text{si } ~~tout~~ -1<a\leq 1 \\ +\infty & \text{si } 1<a. \end{cases}$$
  cette limite n'existant pas si $a\leq -1$.

Noter que dans le cas signalé où les limites étudiées n'existent pas, le passage à l'inverse et l'étude en valeur absolue fournit néanmoins les résultats suivants :

$$\lim \frac{a^n}{\ln n} = 0 \quad \text{si} \quad -1\leq a<0$$

$$\lim \frac{n^a}{a^n} = 0 \quad \text{si} \quad a\leq -1.$$

Les démonstrations ne porteront que sur les cas (ou quelques cas) douteux :

par exemple pour $|a|>1$ on pourra montrer par récurrence que si $n \geq \frac{1}{|a|-1}$ on a. $|a|^n \geq n$

d'où $0 \leq \frac{\ln n}{|a|^n} \leq \frac{\ln n}{n}$ et conclure sachant que $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$;

pour $\frac{a^n}{n^a}$ on pourra étudier $\ln\left[\frac{a^n}{n^a}\right]$

leçon 18

Applications du calcul différentiel à la recherche d'extrema d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples.

1) Définitions :

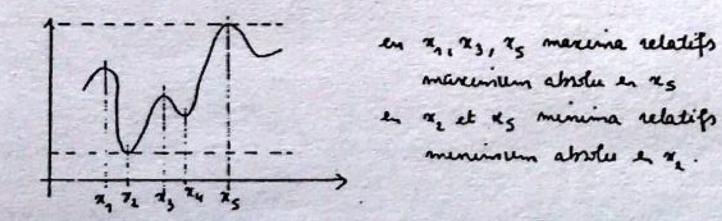
On considère une fonction numérique f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$.

définition : On dit que f admet un maximum (resp. minimum) relatif au point x_0, s'il existe un intervalle I de centre x_0, tel que

$$\forall x \in D \cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

définition : Si f admet un maximum ou un minimum relatif en x_0, on dit que $f(x_0)$ est un extremum relatif.

Remarque : Ces notions de maximum et minimum sont locales. Lorsque $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$), $\forall x \in D$, $f(x_0)$ est un maximum absolu (respectivement minimum absolu).



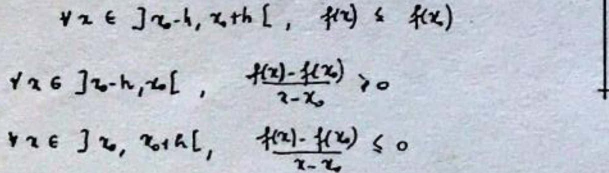
en x_1, x_3, x_5 maxima relatifs
maximum absolu en x_5
en x_2 et x_5 minima relatifs
minimum absolu en x_2.

2) Cas où f est dérivable dans un intervalle contenant x_0.

Condition nécessaire : Soit f définie sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum relatif en ce point, alors $f'(x_0) = 0$.

dém : On suppose par exemple que f admet un maximum relatif en x_0. On peut alors trouver un réel $h > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0-h, x_0+h[, \quad f(x) \leq f(x_0)$$



$$\forall x \in]x_0-h, x_0[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\forall x \in]x_0, x_0+h[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

f est dérivable en x_0, donc ce rapport admet une limite lorsque $x \to x_0$.

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\leq 0} = 0$$

La démonstration est analogue lorsque $f(x_0)$ est un minimum.

Remarque : cette condition est seulement nécessaire et $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas pour conclure.

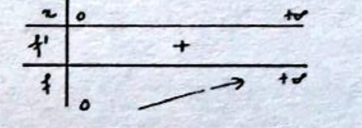
exemple 1 : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2$ On a $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum.

exemple 2 : $f(x) = x - \sin x$ sur $\mathbb{R}_+$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

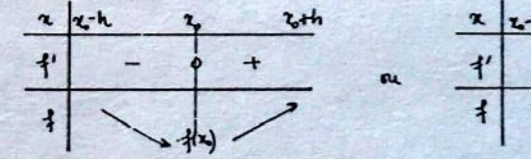


x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée s'annule une infinité de fois mais f n'admet pas d'extremum.

Condition suffisante : Si une fonction est dérivable dans un intervalle ouvert contenant x_0, et si sa dérivée s'annule au point x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum relatif en x_0.

dém : deux cas peuvent se présenter :



x	x_0-h		x_0		x_0+h
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

ou

x	x_0-h		x_0		x_0+h
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

$f(x_0)$ est un minimum local ou $f(x_0)$ est un maximum local.

Dans les deux cas, $f(x_0)$ est un extremum local.

- exemple. $f(x) = x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f'(1) = f'(-1) = 0$ signe de f' : + -1 − 1 +

. -1 et 1 sont des extrema relatifs

on peut même dire que

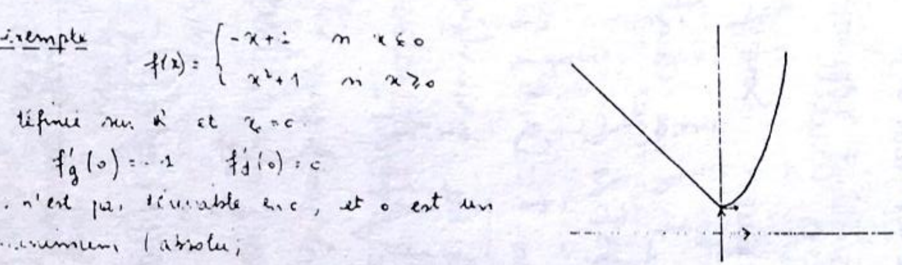
-1 est maximum relatif

1 est minimum relatif

Conclusion à la fin de la leçon :
on cherche les extremums :
- aux bornes - aux points non dérivables
- aux points intérieurs où dérivable
une étude locale (diverse suivant les cas) peut alors permettre de conclure.

remarque. Cette condition est seulement suffisante la fonction peut admettre un extremum en x_0 sans être dérivable en x_0

exemple
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

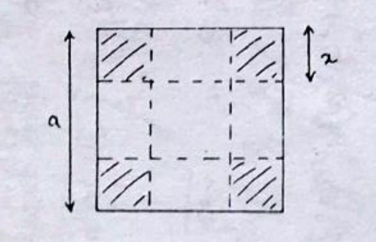


définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0 = 0$

$f'_g(0) = -1 \qquad f'_d(0) = 0$

. n'est pas dérivable en 0, et 0 est un minimum (absolu)

3) Exemple d'application : on dispose d'une feuille de zinc carrée de longueur a, que l'on entaille à ses quatre sommets de carrés de côté x, afin de réaliser par pliage et soudure un récipient de volume $V(x)$. Comment doit-on choisir x pour que V soit maximum ?



x ne peut prendre que des valeurs comprises entre 0 et $\frac{a}{2}$:

$V(x) = x(a-2x)^2$

$V'(x) = (a-2x)^2 + 2x(a-2x)(-2)$

$= (a-2x)(a-2x-4x)$

$= (a-2x)(a-6x)$

x	0		$a/6$		$a/2$
V'		+	0	−	0
V		↗		↘	

V' est négatif entre les racines : le maximum est obtenu en $x = \frac{a}{6}$:

$$V_{max} = V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{4}{9}a^2 \frac{a}{6} = \boxed{\frac{2a^3}{27}}.$$

(79) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Application.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition Soit f une fonction numérique définie sur I. On appelle primitive de f toute fonction F dont la dérivée sur I vaut f.

Théorème. (admis) Toute fonction continue sur I admet sur I une primitive.

Proposition. Si F est une primitive de f sur I, l'ensemble des primitives de f est $\{F+k, k \in \mathbb{R}\}$.

On utilise le théorème des accroissements finis : $F' = G' = f$ implique $F' - G' = (F-G)' = 0$ sur I, d'où $F - G = k$ constante. [c'est ici qu'est utilisé le fait que I est un intervalle].

Donner un tableau de primitives usuelles.

Intégrale d'une fonction continue. Soit f continue sur $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

les primitives de f sur I diffèrent d'une constante, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F de f.

Définition. si f est continue sur $I = [a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, le réel $F(b) - F(a)$, indépendant de la primitive de f, est appellé intégrale de f sur $[a, b]$, et noté $\int_a^b f(t)dt$.

Définition. si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Propriétés ① $\int_a^a f(t)dt = 0$ ② $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, d(t) = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

L'intégrale est une forme linéaire sur les fonctions continues.

③ $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ si $a, b, c \in I$ [Relation de Chasles]

Remarque importante. Si $c \in I$, $\int_c^x f(t)dt = F(x)$ est l'unique primitive de f sur I nulle en c.

Positivité de l'intégrale. Si $f \geq 0$ sur $I = [a,b]$, $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

En effet $f \geq 0$ implique F croissante car $F' = f$.

Il en résulte : $f \geq g$ et $b \geq a \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

En particulier : $-|f| \leq f \leq |f|$ implique $-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$

soit : $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Inégalité de la moyenne. Soit $m = \inf_I f(x)$, $M = \sup_I f(x)$

De $m \leq f \leq M$, il résulte : $\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$

soit, pour $b \geq a$: $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$.

La valeur moyenne $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est donc comprise entre m et M, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, est de la forme $f(c)$, $c \in [a,b]$.

Interprétation en terme d'aire.

Soit f continue, $f \geq 0$ sur $[a,b]$

On suppose connue, au moins intuitivement, la notion d'aire, et soit $A(x)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des t, le graphe de f, les droites $t = a$ et $t = x$. $A(x+h) - A(x)$ vérifie alors, pour $h \geq 0$:

$$mh \leq A(x+h) - A(x) \leq Mh \quad \text{où } m = \inf_{[x,x+h]} f,\ M = \sup_{[x,x+h]} f.$$

Il en résulte en faisant tendre h vers 0 par valeur positive, puis par un raisonnement identique par valeur négative, que A est dérivable, et $A'(x) = f(x)$. D'où $F(b) - F(a) = A(b)$.

Donner comme autre application une étude de fonction du type $\int_a^x f(t)dt$.

J'

80 Intégration par parties ...

I Intégration par parties

1) Introduction

. soient deux réels a, b, $a < b$ et f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$, dérivables sur $[a, b]$ et telles que f' et g' soient continues sur $[a, b]$

Alors $(fg)'(x) = (f'g)(x) + (fg')(x)$

$$\int_a^b (f'g)(x)\,dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b (fg')(x)\,dx$$ par linéarité de l'intégrale.

2) Th soient f et g deux fonctions vérifiant les propriétés ci-dessus, alors

$$\int_a^b (f'g)(x)\,dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b (fg')(x)\,dx$$

3) Intérêt il permet de calculer une primitive de $f'g$ en connaissant une primitive de $g'f$

exemples - calculer $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \,dx$

- si $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\, x^n \,dx$ pour n entier, alors

$$I_n + I_{n+2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$$

- intégrales de Wallis

- calcul d'une primitive de $x \to \ln x$ sur $]0, +\infty[$

II Changements de variable affines

1) Théorème soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit

$u \to g(u) = \alpha u + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$.

Alors g est bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_a^b f(t)\,dt = \alpha \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(\alpha u + \beta)\,du$$

preuve : $I = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$ (F existe car f continue)

$$J = \alpha \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(\alpha u + \beta)\,du = \Big[F\circ g(u) \Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}$$

$$= F\circ g\,(g^{-1}(b)) - F\circ g\,(g^{-1}(a)) = F(b) - F(a) = I$$

2) Exemples

a) montrer que si f est paire, alors

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

b) ———————— impaire ...

c) soit f une fonction périodique, définie et continue sur $\mathbb{R}$, de période T. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

d) calcul de $\int_0^{e-1} x \ln(x+1)\,dx$.

(81) Définition, étude et propriétés de la fonction logarithme népérien - Exemples d'intervention.

(i) La continuité de $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ justifie que l'on définisse $\ln : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ sur $]0,+\infty[$; ln apparaît comme

la primitive nulle en 1 de $f : t \to \frac{1}{t}$. Cette fonction ln est donc dérivable par définition ce qui implique sa continuité ; on en tire également aisément son sens de variation sur $]0,+\infty[$.

(ii) Ne pas oublier que la fonction ln est solution de l'équation fonctionnelle :

$$\underline{f(xy) = f(x) + f(y)} \quad \underline{\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de }]0,+\infty[}.$$

On montrera cette "propriété fondamentale". Rappelons que celle-ci a justifié historiquement et justifie mathématiquement l'intérêt de la construction des fonctions logarithmes en tant qu'isomorphismes du groupe $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

On en tirera quelques conséquences :

$\ln(x^p) = p \ln x$ pour $p \in \mathbb{N}$ puis $\mathbb{Z}$, $\ln x^{p/q} = \frac{p}{q} \ln x$, ...

jusqu'à $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) On n'oubliera pas "<u>l'étude aux bornes</u>"

a) Un moyen simple pour montrer que $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$ est de montrer que $\ln 2 > 0$ donc $\lim(\ln 2^n) = n \ln 2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$; la croissance stricte de ln permet de conclure en considérant $2^n < x$ ...

b) Comme $\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t$ on en tire $\lim_0 \ln = -\infty$ d'où l'existence d'une asymptote verticale $[x=0]$ en 0.

c) On montre ensuite que la courbe représentative de ln admet en $+\infty$ une branche parabolique suivant la direction asymptotique $y = 0$.

Un des moyens classiques pour cela est d'étudier sur $[1,+\infty[$ la fonction $t \to 2\sqrt{t} - \ln t$, d'en déduire que pour $t > 1$ on a $0 < \ln t \leqslant 2\sqrt{t}$ donc $0 < \frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{2}{\sqrt{t}}$

d'où $\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{\ln t}{t}\right] = 0$.

(iv) On procédera à l'étude locale (surtout en 1) avec détermination de la tangente et $\lim_{u \to 0}\left[\frac{\ln(1+u)}{u}\right] = 1$ (cf dérivée de ln en 1).

(v) Dans les applications on ne se limitera pas à des situations du type "calcul d'intérêts composés".
On pourra utilement songer à l'utilisation pour des.

"comparaisons de suites". Par exemple pour $a > 1$

$$\ln\left[\frac{a^n}{n!}\right] = n\ln a - \sum_{i=1}^{n} i = n\left[\ln a - \frac{n+1}{2}\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ...

On peut également montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ la fonction $x \to \ln|kx|$ est une primitive de $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ tout en soulignant qu'il y en a d'autres (prendre une première valeur de k sur $]-\infty, 0[$ puis une autre sur $]0, +\infty[$) ; par contre si l'on se limite à $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$, on a ainsi toutes les primitives.
On peut songer également aux primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ (dérivée logarithmique de u), etc...

(82) Fonction exponentielle de base e. Définition, Propriétés, Etude de la fonction Exemples d'utilisation.

(i) On pourra prendre comme définition de exp. (fonction exponentielle de base e) : " exp est la bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ réciproque de ln."

(ii) Les propriétés et l'étude s'en déduisent alors classiquement en utilisant le fait que pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a
$y = \ln x$ si et seulement si $x = \exp y$.
ainsi que les résultats d'analyse sur les fonctions réciproques (ceux-ci ne sont pas au programme de terminale mais peuvent être utilisés - à condition de les citer de façon exacte - ou redémontrés dans le cas qui nous occupent - par exemple pour la dérivée)

(iii) Application et justification de la dénomination "exponentielle de base e".
On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui soient telles que $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ pour tous x et y

réels.
a) Une telle fonction est toujours ≥ 0 [cf: $f(x) = [f(\frac{x}{2})]^2$]
b) Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(α) il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$;
(β) $f(0) = 0$
(γ) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$
[cf $f(0) = f(x-x)$ et $f(x) = f(x+0)$]

c) Supposons donc que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a alors les résultats suivants :
(α) $f(0) = 1$;
(β) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = [f(x)]^n$;
[demonstration par récurrence]
(γ) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ [cf $f(0) = f(x) f(-x)$]
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = [f(x)]^{-n}$
(δ) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{p}x) = [f(x)]^{1/p}$
[cf $f(p(\frac{1}{p}x)) = f(x)$]
(ε) pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(qx) = [f(x)]^q$.

d) Il existe une seule fonction f continue définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(x+y) = f(x) f(y)$, pour tous x et y réels et telle que $f(1) = a > 0$ soit donné ; cette fonction <u>est $x \to \exp[x \ln a]$</u>
[On a alors en effet $f(q) = a^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et le résultat s'en déduit par continuité de f et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$; comme $x \to \exp[x \ln a]$ vérifie $f(x+y) = f(x) f(y)$ et $f(1) = a$, c'est la bonne !]

e) Conséquence : on prolonge "par continuité" l'écriture a^q ($q \in \mathbb{Q}$) en a^x ($x \in \mathbb{R}$) ; dans le cas où $a = e$ c'est à dire $f(1) = e$ on justifie ainsi l'écriture
$$\exp(x) = e^x$$
et l'on précise le rôle de e comme "base" [cf. $\exp(1) = e$].

– On pourra évidemment préférer développer des applications plus immédiates.

Fonction $x \longrightarrow x^\alpha$

(84)

Supposés connus

- Fonction exponentielle et logarithme ainsi que les théorèmes sur les limites
- Le calcul des dérivées et en particulier les dérivées des fonctions composées
- Définition $x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}$

Définition

Soit α un nombre réel, on appelle "fonction puissance d'exposant α" l'application f_α de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha$

car on avait défini pour $x > 0$ le nbre réel x^α par $x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}$

Remarque :

1) pour $\alpha = n$ entier strictement positif la fonction f_n est la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction $x \to x^n$ définie sur tout $\mathbb{R}$

2) Pour $\alpha = -n$ entier négatif, la fonction f_{-n} est la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction $x \to \frac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

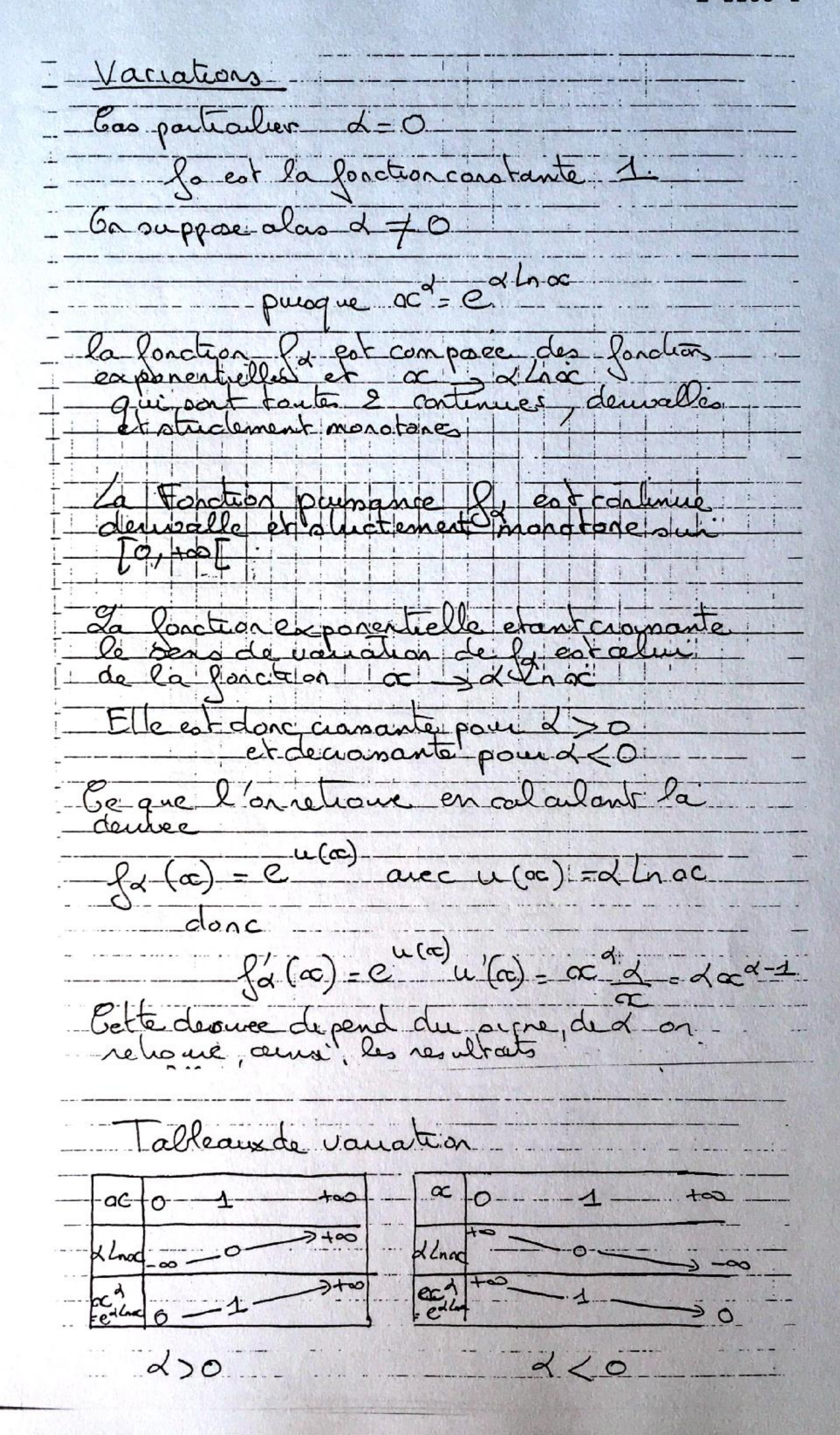
3) pour α rationnel les fonctions f_α sont les fonctions à exposants rationnels

Règles de calcul.

De la définition, on tire aussitôt :

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

ces règles généralisent celles connues pour les exposants rationnels -



Variations

Cas particulier $\alpha = 0$

f_0 est la fonction constante 1.

On suppose alors $\alpha \neq 0$

puisque $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

la fonction f_α est composée des fonctions exponentielles et $x \to \alpha \ln x$ qui sont toutes 2 continues, dérivables et strictement monotones

La fonction puissance f_α est continue dérivable et strictement monotone sur $]0, +\infty[$

La fonction exponentielle étant croissante le sens de variation de f_α est celui de la fonction $x \to \alpha \ln x$

Elle est donc croissante pour $\alpha > 0$
et décroissante pour $\alpha < 0$

Ce que l'on retrouve en calculant la dérivée

$f_\alpha(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \alpha \ln x$

donc

$$f'_\alpha(x) = e^{u(x)} u'(x) = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Cette dérivée dépend du signe de α on retrouve ainsi les résultats

Tableaux de variation

x	0	1	$+\infty$
$\alpha \ln x$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

$\alpha > 0$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha \ln x$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

$\alpha < 0$

limites de f en $+\infty$ et en 0

Ces limites découlent des limites connues des fonctions Ln et exp.

pour $\alpha > 0$ $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \alpha Ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \\ \lim_{x \to 0} \alpha Ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \to 0} x^\alpha = 0 \end{cases}$

pour $\alpha < 0$ $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \alpha Ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \\ \lim_{x \to 0} \alpha Ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty \end{cases}$

Conclusions

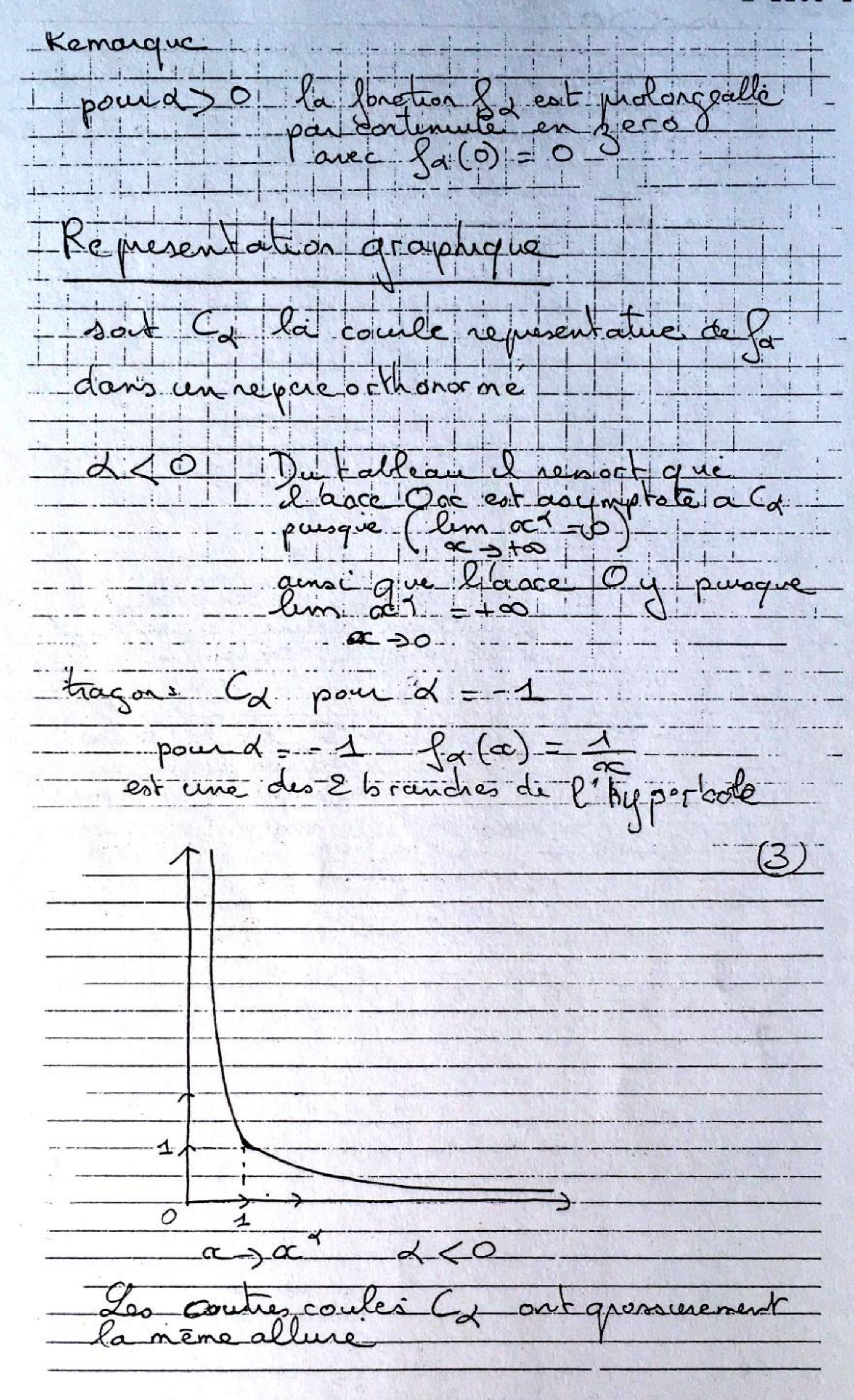
Proposition

Soit α un nombre reel non nul:

la fonction $f_\alpha : x \to x^\alpha$ est une application continue, dérivable est strictement monotonie de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Sa derivee est donnee par

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$



Remarque

pour $\alpha > 0$ la fonction f_α est prolongeable par continuité en zéro avec $f_\alpha(0) = 0$

Représentation graphique

soit C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé

$\alpha < 0$ Du tableau il ressort que l'axe Ox est asymptote à C_α puisque $\left(\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0\right)$ ainsi que l'axe Oy puisque $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

traçons C_α pour $\alpha = -1$

pour $\alpha = -1$ $f_\alpha(x) = \frac{1}{x}$ est une des 2 branches de l'hyperbole

(3)

$x \to x^\alpha$ $\alpha < 0$

Les autres courbes C_α ont grossièrement la même allure

cas $\alpha > 0$

pour $\alpha > 0$ la fonction f_α a été prolongée par continuité en zéro. Cherchons si celle-ci est alors dérivable en 0

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$$

donc

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

On en déduit que

pour $\alpha > 1$ la fonction f_α est dérivable en zéro et sa dérivée est nulle. La courbe C_α est tangente en 0 à l'axe Ox

$\alpha = 1$ la fonction f_α est la demi droite d'équation $y = x$ qui est sa propre tangente en 0

$0 < \alpha < 1$ la fonction f_α n'est pas dérivable en zéro mais la courbe C_α est tangente en 0 à l'axe Oy.

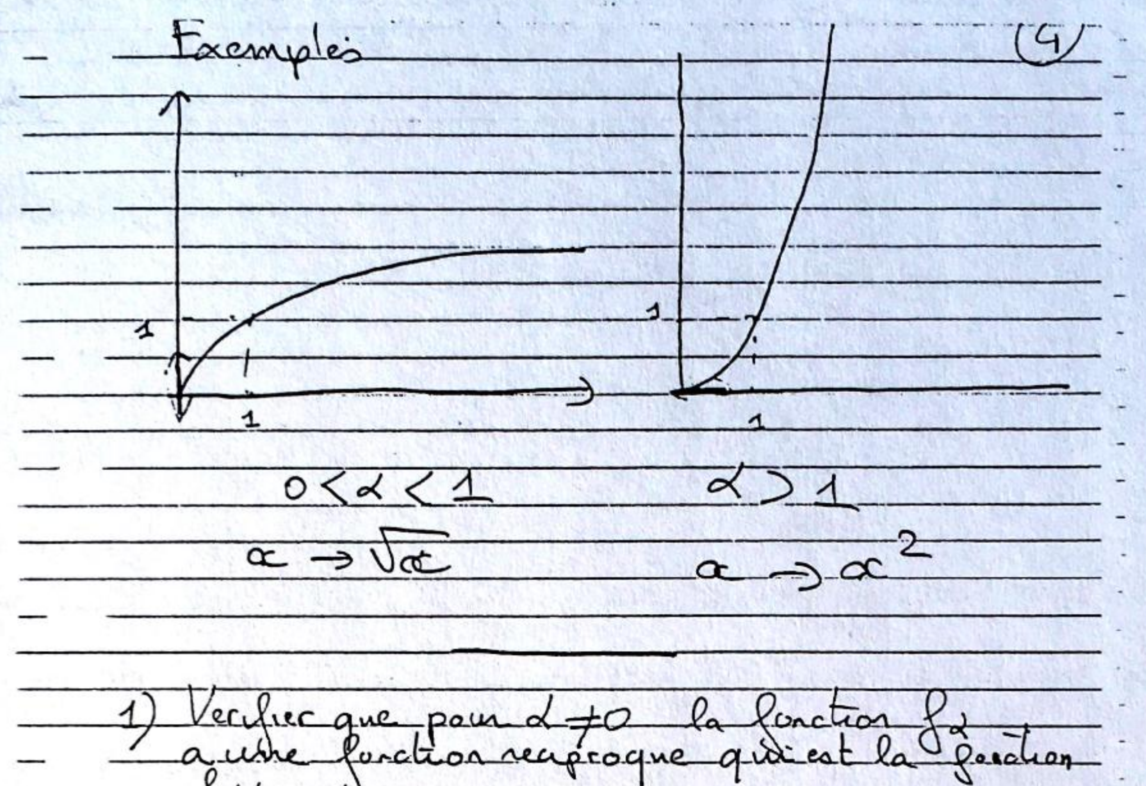
On vérifiera que pour $\alpha > 1$ la fonction dérivée f'_α est continue en zéro et que l'on a $f'_\alpha = \alpha f_{\alpha-1}$

On peut préciser l'allure de C_α en cherchant si la branche infinie a une direction asymptotique

$$\frac{f_\alpha(x)}{x} = x^{\alpha-1} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

de sorte que la courbe C_α admet pour direction asymptotique la ~~dir~~
la direction Oy pour $\alpha > 1$
la direction Ox pour $0 < \alpha < 1$.

Exemples (4)



1) Vérifier que pour $\alpha \neq 0$ la fonction f_α a une fonction réciproque qui est la fonction $f_{1/\alpha}$

2) Calculer la dérivée seconde de f_α. Discuter son signe suivant les valeurs de α. En déduire la concavité de la courbe C_α.

3) Pour p entier impair, on peut prolonger $f_{1/p}$ à $\mathbb{R}^-$, mais les règles de calcul ne s'appliquent plus:

$p=3$. $\frac{1}{p} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$(-1)^{1/3} = -1$, mais $\left[(-1)^2\right]^{1/3} = 1$.

Caractérisation par l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) f(y)$

Il est clair que les fonctions puissance vérifient cette équation. Réciproquement, soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant l'équation. Alors: $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$ et si $f(y) = 0$ avec $y \neq 0$, $f(xy) = 0$ $\forall x$, donc $f \equiv 0$. Soit $g = \mathrm{Ln} f$. $g(xy) = g(x) + g(y)$, donc $g(1) = 0$ et par dérivation : $y g'(xy) = g'(x)$. Pour $x = 1$: $y g'(y) = g'(1)$ d'où $g(y) = \alpha \,\mathrm{Ln}\, y$, et $f(y) = y^\alpha$.

86. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On appelle équation différentielle linéaire du 2° ordre à coef constants

$$* \quad ay'' + by' + cy = 0$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivables définie sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$.

Résoudre cette équation différentielle sur I c'est trouver toutes les fonctions numériques deux fois dérivables sur I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

à mettre en complément

<u>Proposition</u> L'ensemble des solutions de $*$ sur I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

preuve : $y = 0$ solution, y_1 et y_2 sol $\Rightarrow \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ solution

I Résolution de $ay'' + cy = 0$

1) <u>$c = 0$</u>

$(*) \Leftrightarrow \forall x \in I \quad ay'' = 0 \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in I \quad y'(x) = A$

$\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in I \quad y(x) = Ax + B$

et on voit que I peut être pris égal à $\mathbb{R}$. (solution dite maximale car I le plus grand possible)

2) <u>$\frac{c}{a} < 0$</u>

$* \Leftrightarrow \forall x \in I \quad y'' + \frac{c}{a} y = 0 \qquad \frac{c}{a} = -\omega^2 \Leftrightarrow \forall x \in I$

$y'' - \omega^2 y = 0$

on remarque que $f : x \mapsto e^{\omega x}$ $\quad g \ x \to e^{\omega x}$ sont solutions de $*$ sur I.

si y solution de * sur I, alors soit $(\forall x \in I \ e^{-\omega x} \neq 0)$

$x \in I \quad x \to z(x) = e^{-\omega x} y(x)$: z est 2 fois dérivable

on vérifie (calcul) que $z'' + 2\omega z' = 0$

et si $Z = z'$ $\quad Z = A' e^{-2\omega x}$ (résolution connue de $y' + \alpha y = 0$)

$z = A e^{-2\omega x} + B$

$\Rightarrow \forall x \in I \quad y(x) = A e^{-\omega x} + B e^{\omega x}$

or on a vu qu'une telle fonction était solution (elle appartient à l'espace vectoriel engendré par f et g)

De plus on remarque qu'on peut prendre $I = \mathbb{R}$.

<u>Th</u> Les solutions de $y'' - \omega^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \to y(x) = A e^{-\omega x} + B e^{\omega x}$ $\quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$

3) $\frac{c}{a} > 0$ $\quad$ * s'écrit $y'' + \frac{c}{a} y = 0$ $\quad \frac{c}{a} = \omega^2$

- $x \mapsto \omega^2 y^2 + y'^2$ est une fonction constante sur I si y solution de * sur I
- on en déduit que si $\exists x_0 \in I$, $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ alors pour y solution de * sur I, on a $y = 0$
- $f : x \mapsto \sin \omega(x - x_0)$ $\quad g : x \mapsto \cos \omega(x - x_0)$ solutions de * sur I
- $x \to z(x) = y(x) - y(x_0) \cos \omega(x - x_0) - \frac{y'(x_0)}{\omega} \sin \omega(x - x_0)$ avec $x_0 \in I$

est solution sur I (comme combinaison linéaire de solutions) or $z(x_0) = z'(x_0) = 0$ donc $z = 0$

$\Rightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = A \cos \omega(x - x_0) + B \sin \omega(x - x_0)$

on remarque que l'on peut prendre $I = \mathbb{R}$, et $x_0 = 0$

<u>Th</u> Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$x \to A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$

II Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

soit y solution de $*$ sur I

$\forall x \in I \quad e^{\alpha x} \neq 0 \quad$ soit $x \to z(x) = e^{-\alpha x} y(x)$

en prenant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ on a :

$$y \text{ solution de } * \text{ sur } I \iff \begin{cases} \forall x \in I & y(x) = e^{-b/2a} z(x) \\ \forall x \in I & z''(x) + z(x) \dfrac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \end{cases}$$

$b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation caractéristique de $*$

$$ar^2 + br + c = 0$$

si $\Delta = 0 \quad \forall x \in I \quad z(x) = Ax + B$

si $\Delta > 0 \quad \forall x \in I \quad z(x) = A e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} x} + B e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} x}$

si $\Delta < 0 \quad \forall x \in I \quad z(x) = A \cos \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}(x - x_0) + B \sin \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}(x - x_0)$

$x_0 \in I$

Comme en I on remarque que I peut être pris égal à $\mathbb{R}$, que x_0 peut être pris égal à 0 et que l'ensemble des solutions de $*$ définies sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dim 2.

Enoncer un th.

III Exemples.

donner trois exemples numériques

oscillateur mécanique ou circuit RLC.

(89) Transformation de $a\cos x + b\sin x$. Etude des fonctions $a\cos x + b\sin x$. Applications.

Plan de la leçon.

On suppose $(a,b) = (0,0)$

(1) $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right] := f(x)$

Soit θ un réel tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$.

$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$.

On peut alors étudier la fonction, dont le graphe est obtenu à partir de celui de la fonction cosinus par translation et affinité orthogonale de base l'axe des x. Faire différents graphes.

(2) Transformation pour x différent de $\pi + 2k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$

On pose $t = tg\frac{x}{2}$ et $f(x) = g(t) = \frac{a(1-t^2)+2bt}{1+t^2}$.

(3) Utilisation des complexes : Poser $z = \cos x + i\sin x$, et en déduire :

$$f(x) = g(z) = \frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) - i\frac{b}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right) \quad \left[\text{car } \bar{z} = \frac{1}{z}\right].$$

(4) Résolution de $a\cos x + b\sin x = c$.

Par la méthode du (1), si $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$, pas de solution. Sinon, soit α tel que $\cos\alpha = c/\sqrt{a^2+b^2}$. Il vient $x = \pm\alpha + \theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Par la méthode du (2) : Equation du 2e degré en t.

Par la méthode du (3) : Equation en z : $(a-ib)z^2 - 2cz + (a+ib) = 0$

⑤ Interprétation géométrique.

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé direct $O, \vec{i}, \vec{j}$; $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2=1$, D la droite d'équation $ax+by-c=0$.

Si x est solution de $a\cos x + b\sin x = c$, le point $(\cos x, \sin x)$ est à la fois sur D et $\mathcal{C}$. La distance de D au centre de $\mathcal{C}$ étant $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et le rayon de $\mathcal{C}$ valant 1, on retrouve bien la condition nécessaire et suffisante d'existence de solution :

$$|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si cette condition est réalisée, $|c| = \sqrt{a^2+b^2}$ implique une unique solution modulo 2π, si $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$, deux solutions distinctes dans $[0, 2\pi]$. (correspondant respectivement au choix de + ou − dans ④, méthode 1).

$OM^2 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}^2 + \ldots = 1.$

$\leq 1.$

Groupe des homothéties-translations

On note $\vec{f}$ l'application linéaire associée à une application affine f. On rappelle que $f \to \vec{f}$ est un homomorphisme du groupe affine sur le groupe linéaire, dont le noyau est le groupe des translations de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ désigne un espace affine, et E l'espace vectoriel associé). Les homothéties de E sont les endomorphismes de la forme λId ($\lambda \in K^*$, $K = \mathbb{R}$ dans cette leçon), et forment un sous-groupe du groupe linéaire de E.

I Définitions et premières propriétés.

Théorème 1.1

L'ensemble G des bijections affines f telles que $\vec{f}$ soit une homothétie est un sous-groupe du groupe affine.

G est en effet l'image réciproque du sous-groupe des homothéties par l'homomorphisme $f \to \vec{f}$.

Définition 1.2 (f affine, f est une homothétie) $\Leftrightarrow$ $\left(\begin{cases} f \text{ a un unique point fixe } \Omega \\ \exists k \neq 1, \forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\Omega f(M)} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \end{cases}\right)$

Théorème 1.3. $\mathcal{H}$ est l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses translations. On a alors:

$$G = \mathcal{H} \cup \mathcal{C}.$$

G est le groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}$.

Soit $f \in G$. $\vec{f} = k\,Id$. Si $k \neq 1$, $\vec{f} - Id = (k-1)\,Id$ est bijective, donc f a un unique point fixe (voir la leçon sur les applications affines). Pour tout point M on a:

$$\overrightarrow{\Omega f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M}) = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$ Donc f est une homothétie.

Si $k = 1$, $\vec{f} = Id$, et f est une translation.

Remarque 1-4 $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de G, alors que $\mathcal{H}$ n'en est pas un, comme on va le voir en étudiant la nature des composés d'éléments de $\mathcal{H}$.

Remarque 1-5. $f \in G$ est une homothétie si et seulement si $\vec{f} \neq Id$.

II Etude géométrique des composés d'éléments de $\mathcal{H}$.

notations: $t_{\vec{u}}$: translation de vecteur $\vec{u}$. $h_{\Omega,k}$: homothétie de centre Ω et rapport k.

Proposition 2-1

1/ Les translations forment un groupe $\mathcal{C}$ isomorphe à $(E,+)$

2/ Les homothéties de centre Ω forment un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

1/ connu, 2/ immédiat: $h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,k_1k_2}$.

Proposition 2-2

$g_1 = h_{O,k} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{O,k} = g_2$ sont des homothéties de rapport k, et de centres distincts si $k \neq 1$. G n'est donc pas commutatif.

$\vec{g}_1 = \vec{g}_2 = k\,Id$. Si $k=1$, $g_1 = g_2 = t_{\vec{u}}$. Sinon g_1 et g_2 sont des homothéties de rapport k, de centre Ω_1 et Ω_2.

$$\overrightarrow{Og_1(\Omega_1)} = \overrightarrow{O\Omega_1} = k\left(\overrightarrow{O t_{\vec{u}}(\Omega_1)}\right) = k[\overrightarrow{O\Omega_1} + \vec{u}] \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega_1} = \frac{k\vec{u}}{1-k}$$

$$\overrightarrow{O g_2(\Omega_2)} = \overrightarrow{O\Omega_2} = \overrightarrow{Oh(\Omega_2)} + \vec{u} = k\,\overrightarrow{O\Omega_2} + \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega_2} = \frac{\vec{u}}{1-k}.$$

Proposition 2-3 Soit $h_1 = h_{O_1,k_1}$, $h_2 = h_{O_2,k_2}$ $k_i \neq 1$ $(i=1,2)$, $O_1 \neq O_2$.

- Si $k_1k_2 = 1$, $g_1 = h_1h_2$ et $g_2 = h_2h_1$ sont des translations distinctes. ($\mathcal{H}$ n'est donc pas un groupe)
- Si $k_1k_2 \neq 1$ g_1 et g_2 sont des homothéties de centre Ω_1 et Ω_2 distincts

De plus $O_1, O_2, \Omega_1, \Omega_2$ sont alignés.

- $k_1k_2 = 1 \Rightarrow \vec{g}_1 = \vec{g}_2 = Id$. g_1 et g_2 sont des translations de vecteurs u_1 et u_2.

$$u_1 = \overrightarrow{O_2 h_1(O_2)} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1 h_1(O_2)} = (k_1 - 1)\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

$$u_2 = \overrightarrow{O_2O_1}(k_2 - 1) \text{ (en échangeant les indices) } = \frac{k_1-1}{k_1}\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

• $h_1 h_2 = h \neq 1 \Rightarrow \vec{g_1} = \vec{g_2} = h\,Id \Rightarrow g_1$ et g_2 homothéties de rapport h.

$$\overrightarrow{O_1 g_1(\Omega_1)} = \overrightarrow{O_1 \Omega_1} = h_1 \overrightarrow{O_1 h_2(\Omega_1)} = h_1 \overrightarrow{O_1 O_2} + h_1 h_2 \overrightarrow{O_2 \Omega_1}.$$

$$\overrightarrow{O_2 \Omega_1} = \frac{(h_1 - 1)\overrightarrow{O_1 O_2}}{1 - h_1 h_2}$$

$$\overrightarrow{O_1 \Omega_2} = \frac{(h_2 - 1)\overrightarrow{O_2 O_1}}{1 - h_1 h_2} \Rightarrow \overrightarrow{O_2 \Omega_2} = \frac{h_2 - h_1 h_2}{1 - h_1 h_2} \overrightarrow{O_1 O_2} \neq \overrightarrow{O_2 \Omega_1}.$$

<u>Remarque 2-4</u> Si $h = -1$, $h_{\Omega, h}$ est la symétrie centrale par rapport à Ω.

Le produit des symétries centrales par rapport à Ω_1 et Ω_2 est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$ (prop 2-3 1)).

III Caractérisation des éléments de G.

<u>Théorème 3-1.</u> G est l'ensemble des <u>applications affines</u> transformant toute droite en une droite parallèle.

Il suffit de prouver que si $\vec{f}$ est linéaire et transforme tout vecteur en un vecteur colinéaire, alors $\vec{f} = h\,Id$. Voir la leçon "droites stables des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$". Le théorème 3-1 se généralise en toute dimension de façon immédiate.

<u>Théorème 3-2</u> $\dim \mathcal{E} = 2$. G est l'ensemble des <u>bijections</u> f de $\mathcal{E}$ transformant toute droite en une droite parallèle.

La différence avec le th. 3-1 est que f est supposée <u>bijective</u>, mais non nécessairement affine. En fait on peut prouver que toute bijection de $\mathcal{E}$ (de dim qq) conservant l'alignement est affine ($K = \mathbb{R}$). On utilise pas ici ce théorème (dit parfois théorème fondamental de la géométrie affine).

<u>preuve</u>: Soit f comme dans l'énoncé. On discute selon les points fixes:

a) f a deux points fixes distincts M_1 et M_2. Soit $M \notin M_1 M_2$. $f(MM_1)$ est une droite passant par M_1 et parallèle à MM_1 : $f(MM_1) = MM_1$. De même $f(MM_2) = MM_2$. Donc $f(M) = M$. Si $N \in M_1 M_2$, $N \notin MM_2$ et le même raisonnement prouve que $f(N) = N$. $f = Id$.

b) f a un point fixe unique O. Soient M et N tels que $O \notin MN$. Les droites passant par O sont toutes invariantes globalement. Donc $f(N)f(M) // NM$ et $O N f(N)$, $O N f(N)$ alignés. D'après le théorème de Thalès, f est l'homothétie de centre O et de rapport $\overline{Of(N)}/\overline{ON}$.

c) f n'a pas de point fixe.
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$. $g = t \circ f \in G$ d'après a) ou b).
Donc $f \in G$. (f est alors une translation).

IV Application : Théorème de Ménélaüs.

<u>Théorème 4.1.</u> Soient P, Q, R sur les côtés d'un triangle ABC.
$P \in BC \setminus \{B,C\}$, $Q \in AC \setminus \{A,C\}$, $R \in BC \setminus \{B,C\}$.
$(P, Q, R \text{ alignés}) \Leftrightarrow \left(\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1\right)$

On note h_P l'homothétie de centre P envoyant C en B (de rapport $k_P = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$).
" " h_Q " " Q " " A " C (" $k_Q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$)
" h_R " " R " " B " A (" $k_R = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$).

($\Leftarrow$). $h_P \circ h_Q \circ h_R (B) = B$, et $k_P k_Q k_R = 1$. Donc $h_P \circ h_Q \circ h_R = Id$.
$h_P \circ h_Q = h_R^{-1}$. Donc $h_P \circ h_Q$ est de centre R, ce qui prouve que P, Q, R sont alignés. (prop. 2.3).

($\Rightarrow$) Soit R_1 le point de AB tel que $\dfrac{\overline{PB}\,\overline{QC}\,\overline{R_1A}}{\overline{PC}\,\overline{QA}\,\overline{R_1B}} = 1$. ($R_1$ existe, car $\dfrac{\overline{PB}\,\overline{QC}}{\overline{PC}\,\overline{QA}} \neq 1$. Sinon : $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, ce qui d'après Thalès signifie que PQ est parallèle à AB, ce qui est exclu par construction). Alors R_1 est aligné avec PQ (partie directe) : $R_1 = AB \cap PQ = R$.

THEOREME . . : $\mathcal{D}$ est l'ensemble des applications affines transformant toute droite en une droite parallèle.
On utilise la caractérisation des homothéties vectorielles rappelée au début de ce §.

THEOREME . $\mathcal{D}$ est l'ensemble des bijections f de E transformant toute droite une droite parallèle.
La différence avec le théorème 4.14 est que f n'est plus supposée affine, mais bijective. En fait on peut prouver, sans restriction sur la dimension, que toute bijection d'un espace affine sur $\mathbb{R}$ conservant l'alignement est affine : ce résultat est connu comme "théorème fondamental" de la géométrie affine. Le théorème 4.15 est beaucoup plus simple que le théorème fondamental et se prouve en discutant selon les points fixes de f.

b). .f a 2 points fixes distincts M_1 et M_2. Soit $M \notin M_1M_2$ $f(MM_1) = MM_1$, car c'est la droite passant par M_1 et parallèle à MM_1. De même $f(MM_2) = MM_2$.
Donc $f(M) = MM_1 \cap MM_2 = M$. Tout point non situé sur la droite M_1M_2 est fixe.
Si $M \in M_1M_2$, $M \neq M_1$, soit $N \notin M_1M_2$. Alos $M \notin NM_1$, et le raisonnement précédent prouve que M est fixe. Donc $f = Id$.

.Si f a un point fixe unique O. Soient M et N tels que O ne soit pas sur la droite MN. Les droites passant par O étant globalement invariantes $O,N,f(N)$ d'une part, $O,M,f(M)$ d'autre part sont alignés. Puisque $NM//f(N)f(M)$, on déduit du théorème de Thalès que f est l'homothétie de centre O et de rapport $\overline{Of(N)}/\overline{ON}$.

Homothéties ou translations échangeant deux segments.

Théorème : Soit A, B, C, D quatre points du plan, V. $A \neq B$, $C \neq D$. Il existe un élément du groupe des dilatations $\mathcal{D}$ envoyant le segment [AB] sur le segment [CD] si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$. Si $\vec{CD} = k\vec{AB}$ avec $|k| = 1$, il existe une translation et une symétrie centrale envoyant [AB] sur [CD] et ces éléments de $\mathcal{D}$ seulement. Si $\vec{CD} = k\vec{AB}$ avec $|k| \neq 1$ il existe deux homothéties envoyant [AB] sur [CD] et ces éléments de $\mathcal{D}$ seulement.

dém : si $f \in \mathcal{D}$ et envoie [AB] sur [CD] alors $[f(A)\, f(B)] = f([A,B]) = [C\, D]$

Montrons que $\{f(A), f(B)\} = \{C, D\}$. On sait $[f(A), f(B)] = [C, D]$ donc $f(A) \neq C$ et $f(A) \neq D \Rightarrow [f(A), f(B)] \subsetneq [C, D]$ donc nécessairement $f(A) = C$ ou $f(A) = D$. Le même raisonnement implique que : $f(A) = C$ $\Rightarrow f(B) = D$, $f(A) = D \rightarrow f(B) = C$; de plus $f(AB) \parallel (AB) \Rightarrow (CD) \parallel (AB)$.

C f(A) f(B) D

. Supposons $\vec{AB} = k\vec{CD}$ avec $k = 1$ alors $t_{\vec{AC}}$ vérifie $t_{\vec{AC}}(A) = C$ $t_{\vec{AC}}(B) = D$ car $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$. De même la symétrie centrale de centre le milieu de [AD] vérifie $s(A) = D$, $s(B) = C$ (ABCD parallélogramme).
Et il n'y a pas d'autres éléments de $\mathcal{D}$ convenant, un élément de $\mathcal{D}$ étant déterminé lorsqu'on connaît un point et son image.

• $\vec{AB} = k\vec{CD}$ avec $|k| \neq 1$, $k \neq 0$ alors f est une homothétie de rapport $\pm k$. si $f(A) = C$ alors $f(B) = D$ et f est de rapport k nécessairement et son centre O est le barycentre de $(A, -\lambda)$ et $(C, 1)$ car $\vec{OC} = \lambda\vec{OA}$; si $f(A) = D$ alors $f(B) = C$ et f est de rapport $-k$; son centre Ω est le barycentre de (A, λ) et $(C, 1)$ (Dans les deux cas on trouve l'image de B car B, $f(B)$ et le centre sont alignés et $f(B) \in f(AB) = (CD)$).

Applications :

* A, B, C, D non alignés

à la règle seule

une homothétie transformant 1 milieu de segment en le milieu du segment image, alors O, I milieu de [AB], J milieu de [CD]
De même Ω, I, J alignés

- Construire V la parallèle à une droite donnée (AB) passant par le point donné M_0 ($M_0 \notin (AB)$), le milieu I de [AB] étant donné.
- Soient deux droites (d) et (d') ne se coupant pas sur la feuille de papier, sécantes et M_0 un point de la feuille. Tracer OM_0.

* A, B, C, D alignés : si $\vec{AB} = \pm\vec{CD}$ translation et symétrie / milieu de [AC] ou [AD]

si $\vec{AB} = k\vec{CD}$, $|k| \neq 1$ alors si $\Delta_A \parallel \Delta_B$, $\delta_C \parallel \delta_D$ avec $\Delta_A \not\parallel \delta_C$

I et J sont obtenus comme sur cette figure

Groupe des similitudes planes.

Sous groupes remarquables.

I. Définition. Propriétés générales.

Notations : $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien associé à E. La distance est $d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$. L'homothétie de centre P et de rapport k est notée $h_{P,k}$.

Définition 1. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une similitude de rapport k , s'il existe $k > 0$ tel que $\forall (P,Q) \in \mathcal{E}^2$, $d[f(P),f(Q)] = k\, d(P,Q)$.

- Les homothéties de rapport k sont des similitudes de rapport $|k|$.
- Les similitudes de rapport 1 sont les isométries.

Lemme. Pour que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ soit une similitude, il faut et il suffit qu'il existe une homothétie $h_{P,k}$ telle que $f \circ h_{P,k}^{-1}$ soit une isométrie, le rapport de la similitude f étant alors égal à $|k|$.

Sachant que les isométries sont affines et bijectives, on a :

Théorème 1. Toute similitude de $\mathcal{E}$ est affine et bijective.

Théorème 2. Pour qu'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ soit une similitude de rapport k, il faut et il suffit que sa partie linéaire $\varphi = L(f)$ vérifie $(\forall u \in E)\ ||\varphi(u)|| = k\, ||u||$.

Définition 2. Les endomorphismes φ de E vérifiant $(\forall u \in E)\ ||\varphi(u)|| = k\, ||u||$ sont appelés similitudes vectorielles de rapport k.

Notons h_k l'homothétie vectorielle de rapport k. Alors toute similitude vectorielle φ de rapport k est le produit commutatif de h_k et d'une isométrie vectorielle ; et on dira que φ est directe ou indirecte selon que cette isométrie est directe ou indirecte.

Définition 2. Une similitude affine est dite directe ou indirecte selon que sa partie linéaire est directe ou indirecte.

Structure de groupe. D'après la définition 1 on a :

l'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport 1/k. Le composé de deux similitudes de rapports k_1, k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$; d'où :

Théorème 3. Les similitudes de $\mathcal{E}$ constituent un sous groupe du groupe affine de $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, admettant pour sous groupes

le groupe $\mathcal{S}^+(\mathcal{E})$ formé par les similitudes directes

le groupe $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$

le groupe $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ des dilatations (translations - homothéties.

(On pourra montrer que ces trois sous-groupes sont distingués).

Points fixes.

Théorème 4. Toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un point fixe unique, appelé centre de la similitude (propriété générale des applications affines f dont la partie linéaire φ admet 0 pour seul point fixe : alors $\varphi - Id$ est injective, donc bijective, et l'équation $f(M) = M$, qui équivaut à $\overrightarrow{f(A)f(M)} = f(\overrightarrow{IA}).\overrightarrow{A+AM}$ admet pour unique solution $M = A+u$, où u est solution de $\varphi(u) - u = \overrightarrow{f(A)A}$.

Remarque. Les similitudes de centre donné I constituent un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, isomorphe au groupe des similitudes vectorielles de E.

II. Cas des similitudes planes. (dim $\mathcal{E} = 2$).

Théorème 5. Toute similitude plane directe de rapport $k \neq 1$ se décompose de manière unique en le produit commutatif d'une homothétie et d'une rotation de même centre (la rotation pouvant se réduire à l'identité).

En effet, si I est le centre de la similitude s, $s \circ h^{-1}_{I,k}$ est une isométrie directe admettant I pour point fixe, donc une rotation de centre I ou l'identité, et la commutation est évidente, ainsi que l'unicité.

Théorème 6. Toute similitude plane indirecte de rapport $k \neq 1$ se décompose de manière unique en le produit commutatif d'une homothétie et d'une symétrie axiale dont l'axe passe par le centre d'homothétie.

(Corollaire : si s est une similitude indirecte, s^2 est une homothétie).

En effet, si I est le centre de la similitude, $s \circ h^{-1}_{I,k}$ est une isométrie indirecte admettant I pour point fixe, donc une symétrie d'axe passant par I.

- Faire les figures ! -

Détermination d'une similitude par la donnée des images de deux points :

Théorème 7. Si (A,B) et (A',B') sont deux couples de points du plan $\mathcal{E}_2$ $(A \neq B, A' \neq B')$ il existe une unique similitude directe [resp. indirecte] s telle que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$.

Pour prouver l'existence, on peut commencer par faire une translation qui envoie A sur A', puis une homothétie de centre A' et de rapport $\frac{d(A',B')}{d(A,B)}$ - il ne reste plus qu'à faire une rotation, (ou une symétrie axiale).

D'autre part, si s_1, s_2 sont deux similitudes distinctes envoyant (A,B) sur (A',B'), alors $s_2^{-1} \circ s_1$ est une similitude laissant A,B fixes, donc une symétrie axiale : il en résulte que s_1, s_2 ne peuvent être toutes deux directes, ni toutes deux indirectes - d'où l'unicité annoncée.

Construction du centre I de la similitude directe dans le cas où les droites (AB), $(A'B')$ sont sécantes en O.

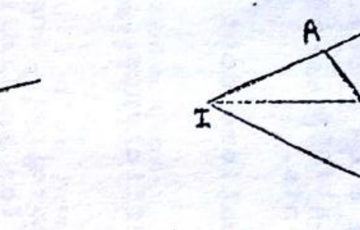
$(OA, OA') = (OB, OB')$

L'égalité d'angles de droites $(IA, IA') = (IB, IB') = (AB, A'B')$ montre que I appartient aux cercles (OAA') et (OBB') ; et O ne peut être centre de similitude que si $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$, donc si ~~$A'B' // AB$~~ $(AA') // (BB')$, auquel cas les cercles sont tangents (car m̂ tgte T_A et T_B en O) (fig. 1).

$T_A = T_B$

cas où O est centre de la similitude

Construction de l'axe Δ de la similitude indirecte. (fig. 2)



(fig. 1)

Δ bissectrice intérieure du triangle IAA' donc $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = -\frac{d(A',B')}{d(A,B)}$ rapport de s.

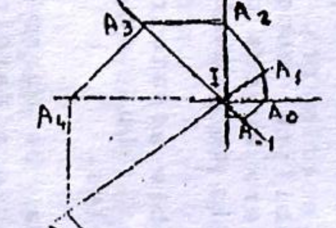
on obtient ainsi un point P sur $[AA']$ puis Q sur $[BB']$.

III. Groupes de similitudes.

Remarque générales : Si s est une similitude de rapport $k \neq 1$, les itérées de s sont toutes distinctes (car de rapports distincts) ; et si A est un point distinct du centre s, les points $s^{(n)}(A)$ sont tous distincts. Donc :

- Tout sous-groupe fini de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est formé d'isométries.
- Le stabilisateur dans $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ d'une partie finie de $\mathcal{E}$ de cardinal ≥ 2 est formé d'isométries.

Dans le cas plan, on peut étudier le groupe engendré par une similitude (directe ou indirecte) s de rapport $k \neq 1$. Voici l'orbite d'un point A_0 dans un tel groupe:



ici s est la similitude de centre I d'angle $\frac{\pi}{4}$ et rapport $\sqrt{2}$

ici s est indirecte d'axe Δ

Leçons de 1993

PREMIERE EPREUVE.

DENOMBREMENTS. PROBABILITES.

01. Cardinal de l'ensemble A^p des p-listes d'éléments d'un ensemble fini A. Dénombrement des arrangements et des permutations. Exemples de situations dont l'étude se ramène aux cas précédents.

02. Dénombrement des combinaisons. Exemples de situations dont l'étude se ramène à ce cas.

03. Formule du binôme: Propriétés des coefficients binomiaux. Applications.

04. Description mathématique d'une expérience aléatoire: ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini).

05. Probabilité conditionnelle; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilités.

06. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.

07. Schéma de Bernoulli, épreuves répétées, description à l'aide d'une variable aléatoire. Espérance mathématique. Exemples.

ARITHMETIQUE.

08. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Application à l'arithmétique.

09. PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications.

10. Nombres premiers; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers.

POLYNOMES ET SYSTEMES.

11. Fonctions polynômes à une variable; critère pour qu'une telle fonction soit nulle. Degré, factorisation par x-a. Applications.

12. Fonction polynôme du second degré, mise sous forme canonique. Application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Application: équations et inéquations du second degré.

13. Somme et produit des racines d'une équation du second degré. Exemples d'applications en algèbre et géométrie.

14. Description de l'étude des systèmes linéaires par opérations élémentaires sur les lignes (méthode du pivot). Exemples.

NOMBRES COMPLEXES.

15. Introduction du corps des complexes; propriétés (conjugaison, interprétation géométrique...).

16. Module d'un nombre complexe; nombres complexes de module 1. Argument d'un nombre complexe non nul, notation $e^{i\theta}$. Applications à la trigonométrie.

17. Etude de la fonction $t \to e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; définition de e^{a}, a appartenant à $\mathbb{C}$. Applications.

18. Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe; groupe des racines $n^{ièmes}$ de l'unité. Interprétation géométrique; applications.

19. Module et argument d'un nombre complexe; interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

20. Représentation géometrique des nombres complexes; interprétation géometrique des applications z->z+b et z->az où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géometriques du plan.

21. Etude des transformations du plan complexe de la forme z->az+b, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations et de tranformations en géométrie plane.

VECTEURS. ANALYTIQUE.

23. Emploi du calcul vectoriel pour l'étude des droites et des plans dans l'espace (génération, parallélisme, points alignés, points coplanaires...).

24. Enoncé du théorème de Thalès. Projection affine dans le plan et/ou l'espace, projection vectorielle associée; propriétés et applications.

25. Représentations paramétriques d'une droite dans le plan. Génération des demi-droites, des segments. Equations cartésiennes. Parallélisme, orthogonalité.

26. Droites et plans dans l'espace. Equations; positions relatives; plans contenant une droite donnée.

27. Interprétation du calcul vectoriel dans le langage des configurations (parallélogramme, configuration de Thalès,...) et dans celui des transformations; applications.

TRANSFORMATIONS.

28. Caractérisation des translations et des homothéties du plan par leur effet sur les vecteurs. Applications.

29. Recherche des homothéties ou des translations du plan tranformant une configuration ususelle donnée en une autre: segments (configuration du trapèze), carrés, cercles... Applications.

30. Etude de l'ensemble des transformations du plan conservant les angles orientés de vecteurs et les rapports de longueurs.

31. Homothétie plane; tranformation vectorielle associée. Invariants élémentaires: effet sur les directions, l'alignement, les distances,...Applications à l'action sur les configurations usuelles.

32. Réflexion du plan échangeant deux points donnés; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit,...).

33. Réflexions du plan échangeant deux droites concourantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle,...).

CONFIGURATIONS PLANES.

34. Relations métriques et trigonométriques dans le triangle rectangle. Applications.

35. Propriétés caractéristiques des parallélogrammes; caractérisation des rectangles, des losanges, des carrés.

36. Recherche des isométries du plan conservant un parallélogramme, un rectangle, un losange, un carré (ou ordre inverse).

37. Droites remarquables dans le triangle: médiatrices, hauteurs, médianes, bissectrices...

38. Réflexions et rotations du plan. Invariants élémentaires: effet sur les distances, les angles, l'alignement,...Applications à l'action sur les configurations usuelles.

39. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation,...).

40. Définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan; expression dans une base orthonomale, application au calcul de distances et d'angles.

41. Le cercle: définition, équation. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Propriétés angulaires.

42. Théorème de l'angle inscrit: ensemble des points M du plan tels que $(\vec{MA},\vec{MB})=a$ modulo π, ou modulo 2π. Cocyclicité. Applications.

43. Relations métriques et trigonométriques fondamentales dans le triangle. Applications.

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE.

44. Projection orthogonale sur un plan de l'espace, projection vectorielle associée. Exemples d'effet d'une telle projection sur une configuration de l'espace.

45. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté: calculs de distances, angles...

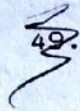
46. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente; interprétation cinématique.

BARYCENTRE.

47. Etude de l'application $M \to \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{MA_i}$. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité de la barycentration; application à la détermination de barycentres attachés à des configurations usuelles du plan et/ou de l'espace.

48. Dans le plan, étude de la fonction $M \to \sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2$ et de ses lignes de niveau. En particulier, transformation de $MA^2 + MB^2$ et $MA^2 - MB^2$; interprétation géométrique.

COMPOSITIONS DE TRANSFORMATIONS PLANES.



49. Composées d'homothéties et de translations du plan. Relation vectorielle caractéristique. Invariants élémentaires: effet sur les directions, les distances, les angles,... Groupe des homothéties-tranlations.

50. Composées de réflexions du plan fixant un point donné. Invariants élémentaires: effet sur les distances, les angles,... Groupe des isométries fixant un point.

51. Groupe des isométries du plan: décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

52. Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre; effet sur les distances, conservation des angles orientés. Similitudes directes. Ecriture complexe. Groupe des similitudes directes.

53. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE.

54. Orthogonalité dans l'espace; droites orthogonales; droite orthogonale à un plan; plans perpendiculaires; applications.

55. Homothéties et translations dans l'espace; tranformation vectorielle associée. Invariants élémentaires: effet sur les directions, l'alignement, les distances,...Applications à l'action sur les configurations usuelles.

56. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés; plan médiateur, régionnement associé. Etude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

57. Réflexions et rotations de l'espace. Invariants élémentaires: effet sur les distances, les angles,...Applications à l'action sur les configurations usuelles.

58. Recherche des isométries de l'espace conservant un tétraèdre régulier; cas des déplacements.

CONIQUES.

59. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions. Constructions de la tangente et de la normale en un point.

60. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.

61. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.

62. Méthodes d'obtention et de construction géométrique de la tangente en un point à une ellipse.

63. Méthodes d'obtention et de construction géométrique de la tangente en un point à une hyperbole.

64. Exemples de représentation paramétrique des coniques; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse,et une hyperbole.

SUITES.

65. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.

66. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie: comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

67. Etude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes.

68. Etude des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1}=au_n+b$: terme général, cas particuliers, somme des premiers termes, comportement asymptotique...). Exemples.

FONCTIONS (limites et dérivées).

69. Limite d'une fonction en un point a de $\mathbb{R}$. Enoncés usuels: comparaison, opérations algébriques, composition. Exemples.

70. Fonctions continues en un point; théorèmes usuels: opérations algébriques, composition. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Exemples.

71. Développement limité d'ordre 1 d'une fonction en un point; nombre dérivé. Interprétations de ce nombre. Exemples.

72. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Exemples.

73. Etude au voisinage de 0 des fonctions $x \to (1+x)^2$, $x \to (1+x)^3$, $x \to 1/(1+x)$, $x \to \sqrt{1+x}$. Exemples d'emploi des approximations ainsi obtenues pour l'étude de grandeurs géométriques, physiques, économiques,...

74. Etude au voisinage de 0 des fonctions $x \to \ln(1+x)$, $x \to \exp x$, $x \to \sin x$, $x \to \cos x$. Applications.

75. Limite finie d'une fonction. Enoncés usuels: comparaison, opérations algébriques, composition. Exemples.

76. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions.

77. Emploi du calcul différentiel pour l'étude de la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport aux tangentes et aux sécantes.

78. Applications du calcul différentiel à la recherche d'extrema (maximum et minimum) d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples.

FONCTIONS (intégration).

79. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

80. Intégration par parties, changements de variable affines. Exemples.

LOG; EXP; FONCTION PUISSANCE.

81. Définition, étude et propriétés de la fonction logarithme népérien. Exemples d'intervention.

82, Définition, étude et propriétés de la fonction exponentielle de base *e*. Exemples d'intervention.

83, Définition, étude et propriétés des fonctions exponentielles de base a où a>0. Caractérisation de ces fonctions par leur équation fonctionnelle: f(x+y)=f(x).f(y).

84. Définition, étude et propriétés des fonctions x->x^a, où a appartient à R. Caractérisation de ces fonctions par leur équation fonctionnelle: f(x.y)=f(x).f(y).

85. Croissance comparée des fonctions x->exp x, x->x^a et x->ln x au voisinage de plus l'infini. Applications.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

86. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients contants sans second membre. Exemples.

87. Caractérisation de la fonction exponentielle x->exp ax par l'équation différentielle y'=ay. Exemples d'intervention.

88. Caractérisation des fonctions circulaires x->cos ax et x->sin ax par l'équation différentielle $y''+a^2y=0$. Exemples d'intervention.

TRIGONOMETRIE.

89. Transformation de l'expression a cos x + b sin x. Etude des fonctions x -> a cos x + b sin x. Applications.

x travaillée Dan

TABLE DES MATIERES

Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe. (17)

pré-requis : $\mathbb{C}$, arg et module

I/ Racines $n^{ièmes}$ d'un complexe

① Définition

remarque : $n=1$
$z=0$

② Théorème

tout z de $\mathbb{C}^*$ admet n racines $n^{ième}$
à démontrer correctement

exemples:
- $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $r>0$
- racines carrées de z
- racines cubiques de l'unité

③ Interprétation géométrique

sommet d'un polygone régulier (à justifier)

II/ Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

① Définition et théorème

$$U_n = \{ \omega_k \ / \ \omega_k = e^{i2k\pi/n} \ , k \in \{0,1,\dots,n-1\} \}$$

② $(U_n, \times)$ groupe ~~multiplicatif~~

U_n engendré par ω_1 (groupe cyclique d'ordre n)

$(U_n, \times) \sim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ | $f : \mathbb{Z} \to U_n$, $p \mapsto \omega_p$ | f hom surjec $\text{Ker} f = n\mathbb{Z}$ $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

générateurs de $(U_n, \times)$ sont ω_k avec k et n premiers

③ Propriétés

- racines $n^{ièmes}$ d'un complexe en multipliant l'une d'entre elles par les racines $n^{ièmes}$ de l'unité.

  démon et exemple racines cubiques de -8

- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$. les ω_k solutions dans $\mathbb{C}$ de $x^n - 1 = 0$
  ($\sum \omega_k = 0$ propriété sur les équations algébriques)

III/ Applications

- résolution de $\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^3 + \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2 + \left(\frac{2-i}{2+i}\right) + 1 = 0$

- Construction d'un pentagone régulier.

$1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4$ racines 5èmes de 1 $\Rightarrow 2(\cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5) = -1$ et $\cos 2\pi/5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$1/_{1}$ $B/2$